

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра “Техническая физика”

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ФИЗИКЕ
Часть I
(Механика, молекулярная физика и термодинамика)

Минск 2016

УДК 531.231 (076.5)
ББК 22.213

Составители:

Хорунжий И.А., Трофименко Е.Е., Шеденков С.И., Жарникова Е.С., Степанов М.А., Качан С.М., Кононова Т.С., Кудин В.И., Мартинович В.А., Маркова Л.В., Танана Т.В., Блинкова Н.Г., Жиров Г.И., Францкевич Н.В., Смурага Л.Н., Русакевич Д.А., Авсиевич Т.А.

В методических указаниях рассмотрены правила проведения измерений, кратко рассмотрена теория ошибок, возникающих при измерениях. Рассмотрены лабораторные работы, выполняемые студентами Белорусского национального технического университета при изучении разделов “Механика. Колебания и волны. Молекулярная физика и термодинамика” при изучении дисциплины “Физика”. Приведено описание лабораторных установок и методики проведения и обработки результатов экспериментов. Даны рекомендации по оформлению отчетов по лабораторным работам, оформлению таблиц и графиков.

Белорусский национальный технический университет
пр-т Независимости, 65, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.(017) 293-91-97 факс (017) 292-91-37

© БНТУ, 2016
© Хорунжий И.А., Трофименко Е.Е., Шеденков С.И., 2016

Содержание

	Стр.
1. Вводное занятие. Правила проведения измерений и обработка результатов измерений	4
2. Измерение массы тела косвенным методом	22
3. Динамика упругого соударения шаров	34
4. Измерение коэффициента трения качения методом наклонного маятника	54
5. Определение момента инерции крестообразного маятника	67
6. Определение момента инерции твердого тела методом крутильных колебаний	85
7. Измерение скорости полета снаряда баллистическим методом	96
8. Сложение гармонических колебаний	111
9. Механика и термодинамика звука в газовой среде	127
10. Определение скорости ультразвука и модуля объемной упругости методом стоячей волны	148
11. Определение коэффициента поверхностного натяжения методом отрыва кольца	164
12. Определение коэффициентов вязкости жидкости методом Стокса	181
13. Определение теплоты испарения жидкости	199
14. Измерение постоянной адиабаты воздуха	209
15. Явления переноса в газах	232
16. Измерение теплопроводности металлов	245

1. ПРАВИЛА ПРОВЕДЕНИЯ ИЗМЕРЕНИЙ И ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

1.1. Виды измерений и их погрешности

Неотъемлемой частью физического эксперимента являются измерения. Измерением называется нахождение значения физической величины опытным путем с помощью технических средств. Измерить физическую величину – означает сравнить ее с эталонной физической величиной, принятой за единицу измерения. Измерения бывают **прямые и косвенные**. **Прямыми** называются измерения, при которых искомое значение физической величины находится непосредственно путем сравнения интересующей величины с эталоном или копией эталона (по показаниям прибора). Например, измерение длины тела штангенциркулем или линейкой, силы тока амперметром, массы тела взвешиванием и т. д. Измерения, при которых искомое значение физической величины вычисляется по формуле, в которую входят результаты прямых измерений других величин, связанных с искомой известной функциональной зависимостью, называется **косвенными**. Например, определение плотности вещества путем измерения массы и объема тела, а затем вычисление плотности как отношение массы тела к его объему и т.п.

Любое измерение дает результат, несколько отличающийся от истинного значения измеряемой величины, т.е. измерение сопровождается ошибками или погрешностями. Причины возникновения погрешностей разные и могут быть обусловлены особенностями исследуемого объекта, измерительными инструментами и другими причинами.

Следует пояснить смысл термина “истинное значение” измеряемой величины. На практике “истинного значения” измеряемой величины, как правило, не существует в природе. Действительно, если мы поставим задачу измерить длину стола, то сразу возникает вопрос, что понимать под “истинной” длиной стола? Длину передней или задней стороны столешницы,

верхнего или нижнего края (вследствие неидеальной формы все эти значения различаются). В другом примере, поставив задачу измерить диаметр проволоки, мы тут же столкнемся с тем, что сечение проволоки не является идеально круглым, а представляет собой эллипс и, следовательно, не ясно, что рассматривать в качестве диаметра – большой или малый диаметр эллипса. Кроме того, при детальном исследовании окажется, что при смещении вдоль проволоки ее диаметр тоже незначительно изменяется от одного участка проволоки к другому. Таким образом, на практике решается задача определения *среднего* значения измеряемой величины, которое наиболее точно характеризует исследуемый объект, а понятие “истинное значение” следует понимать не иначе, как некий гипотетический идеал.

Отличие результата измерения от среднего значения характеризуется абсолютной и относительной погрешностями измерений.

Абсолютная погрешность измерения некоторой физической величины X равна разности измеренного и среднего значений, взятой по модулю:

$$\Delta X = |X - X_{\text{ср}}|. \quad (1.1)$$

Абсолютная погрешность измеряется в тех же единицах, что и сама величина. **Относительная погрешность** равна отношению абсолютной погрешности к среднему значению данной физической величины

$$\varepsilon_X = \frac{\Delta X}{X_{\text{ср}}} \cdot 100\%. \quad (1.2)$$

По природе возникновения все погрешности подразделяются на *случайные, систематические, инструментальные (приборные) и промахи.*

Случайной называется погрешность измерения, изменяющаяся случайным, непредсказуемым образом при повторных измерениях одной и той же величины. Случайные погрешности обусловлены нерегулярно

меняющимися условиями эксперимента (изменение температуры, вибрация, колебания воздуха и т.п.), плохой повторяемостью показаний приборов, несовершенством органов чувств экспериментатора (невнимательность, ошибки при считывании показаний приборов) и др. Немецкий математик Гаусс исследовал закономерности появления случайных ошибок и показал, что *случайные ошибки равновероятны по знаку (т.е. с одинаковой вероятностью изменяют результат как в большую, так и в меньшую сторону) и чем больше величина ошибки, тем реже она появляется в опыте.*

Теоретически случайные ошибки могут лежать в очень широких пределах, поэтому на практике нужен критерий, позволяющий реально оценивать с какой вероятностью измеряемая величина попадает в тот или иной интервал возможных значений. Часто для оценки случайных ошибок используют **стандартное отклонение** σ которое рассчитывают по формуле:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{i=n} (X_{\text{ср}} - X_i)^2}, \quad (1.3)$$

где n – количество выполненных измерений, $X_{\text{ср}}$ – среднее значение измеряемой величины, X_i – результат i -го измерения. Смысл стандартного отклонения σ иллюстрирует Рис.1.1, на котором представлена вероятность P появления некоторого значения измеряемой величины X в результате измерения. При этом вероятность P появления того или иного результата X в опыте определяется соотношением:

$$P = \frac{\Delta N}{N}, \quad (1.4)$$

где ΔN – количество измерений (опытов) в которых было получено рассматриваемое значение X , а N – общее количество проведенных измерений.

При использовании стандартного отклонения σ **доверительный интервал** $[X_{cp} - \sigma, X_{cp} + \sigma]$, определяет область, в которую попадают 68% всех полученных при измерении результатов (см. Рис.1.1). В интервал $[X_{cp} - 2\sigma, X_{cp} + 2\sigma]$ попадает уже 95% всех полученных при измерении результатов, а в интервал $[X_{cp} - 3\sigma, X_{cp} + 3\sigma]$ попадает 99,7% результатов.

Для корректного расчета стандартного отклонения σ количество измерений n должно быть достаточно большим (несколько десятков или

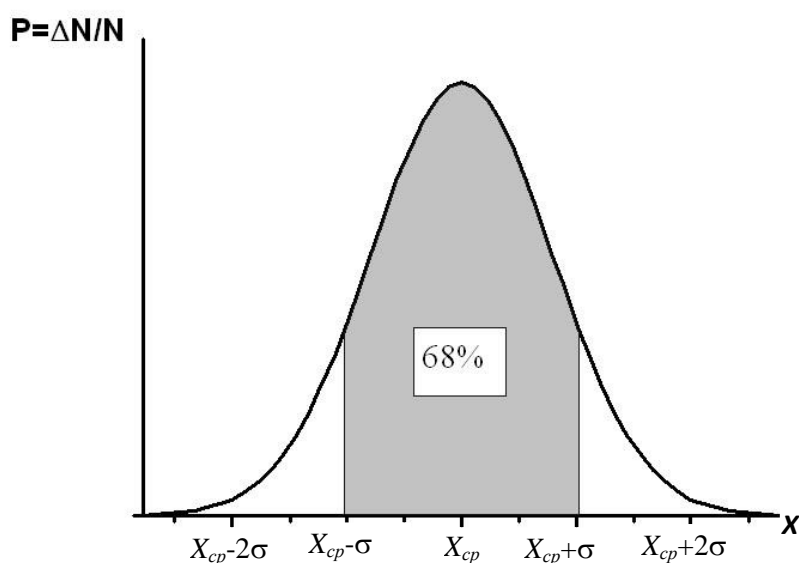


Рисунок 1.1. Распределение Гаусса – зависимость плотности вероятности появления результата измерения от его величины.

Вероятность попадания результата измерения в интервал $[X_{cp} - \sigma, X_{cp} + \sigma]$ составляет 68%.

более), чтобы смогли проявиться статистические закономерности. На практике не всегда есть возможность и необходимость проводить такое большое количество измерений, поэтому существуют и другие способы оценки случайных погрешностей. В простейшем случае в качестве случайной погрешности берется среднее по модулю отклонение результата измерения от среднего значения измеренной величины X_{cp} :

$$\Delta \bar{X}_{\text{сл}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} |X_{\text{ср}} - X_i|. \quad (1.5)$$

Эта оценка случайной ошибки не является строгой, она дает несколько завышенное значение ошибки и не позволяет точно оценить вероятность, с которой искомая величина должна попадать в доверительный интервал, но ввиду своей простоты применяется достаточно часто.

Устранить случайные погрешности нельзя, но можно уменьшить их влияние на конечный результат при увеличении числа измерений и использовании методов учитывающих закономерности появления случайных ошибок. Методика обработки результатов прямых измерений, применяемая в учебной лаборатории физики, будет рассмотрена далее в разделе “Прямое измерение. Обработка результатов прямого измерения”.

Систематической называется погрешность или ошибка измерения, величина которой от опыта к опыту не изменяется. *Систематическая ошибка изменяет результат опыта всегда в одну и ту же сторону, на одну и ту же величину, т.е. постоянна по знаку и величине.* Систематические ошибки могут быть обусловлены неисправностью или неправильной регулировкой измерительного прибора (неточная разбивка шкалы линейки, неточный вес гирь, замедленный ход секундомера и т.п.), а также особенностями самого исследуемого объекта и не зависят от числа измерений.

Систематические ошибки, обусловленные особенностями изучаемого объекта можно разделить на те, которые можно предсказать и при необходимости учесть и на ошибки, которые невозможно предсказать заранее. Например, при определении массы тела путем взвешивания на лабораторных весах, масса исследуемого тела отличается от массы разновесов (гирь) вследствие наличия силы Архимеда, действующей на тело, помещенное в жидкость или газ. При необходимости, поправку обусловленную силой Архимеда можно рассчитать и учесть. В другом

случае, при определении косвенным путем плотности материала, из которого изготовлена деталь, может оказаться, что внутри детали имеется полость (например, воздушный пузырь, сформировавшийся при отливке детали), о которой экспериментатор не знает. Тогда при делении массы детали на измеренный объем, всякий раз будет получаться значение плотности, отличающееся от истинного значения в меньшую сторону. Установить наличие полости внутри детали, можно лишь используя специальные методы (рентгеновское исследование, ультразвуковое зондирование и т.п.). В данном примере без применения специальных методов обнаружить присутствие в результате измерения систематической ошибки не представляется возможным.

Систематическую ошибку, обусловленную неточностью или неисправностью измерительного прибора можно установить путем поверки прибора. Т.е. необходимо сравнить результаты одинаковых измерений, выполненных поверяемым прибором и надежным прибором более высокого класса точности. Различие в полученных результатах указывает на присутствие в результатах поверяемого прибора систематической ошибки. При обнаружении систематической ошибки, обусловленной прибором, можно: 1) заменить прибор на исправный; 2) отрегулировать или отремонтировать прибор; 3) определить знак и величину ошибки и ввести поправку; 4) в некоторых случаях можно изменить методику проведения измерения с тем, чтобы устранить систематическую ошибку. Например, при использовании для взвешивания тела рычажных весов, одно из плеч всегда немного короче другого. Поэтому, помещая исследуемое тело на одну и ту же чашку весов, а разновесы на другую, мы будем получать систематическую ошибку. Но если при взвешивании тело и разновесы от опыта к опыту менять местами, а результат определять как среднее арифметическое результатов измерений, то эта систематическая ошибка компенсируется. *При работе в учебной лаборатории предполагается, что*

все используемые приборы исправны, поверены и систематической ошибки не вносят, поэтому в дальнейшем эта ошибка не учитывается.

Инструментальная (приборная) ошибка – ошибка, обусловленная ограниченной точностью используемого прибора. Например, используя обычную миллиметровую линейку нельзя добиться микронной точности, а с помощью обычных наручных часов измерить время с точностью до миллисекунды. Т.е. применение того или иного прибора определяет максимальную точность, которую можно достичь с его помощью. Считается, что при считывании результата со шкалы аналогового прибора максимальная точность, которую можно обеспечить, не превышает половину цены деления прибора. Поэтому *инструментальную (приборную) ошибку полагают равной половине цены деления аналогового прибор или, если прибор снабжен нониусным устройством, половине цены деления нониусного устройства. При использовании цифрового прибора инструментальная ошибка равна цене деления цифрового прибора.*

Грубые погрешности или промахи - это большие ошибки, совершенно искажающие результат измерений. Они обусловлены резкими изменениями условий эксперимента (скачки напряжения в сети) или невнимательными действиями экспериментатора. *Результаты, содержащие грубые промахи, необходимо выявить и исключить из рассмотрения.* На практике для более надежного исключения промахов часто специально делают несколько дополнительных измерений и перед началом обработки результатов отбрасывают самые большие и самые малые значения.

Обобщая вышесказанное можно заключить, что любое измерение представляет собой задачу, в которой необходимо: во-первых, определить среднее значение измеряемой величины, во-вторых, оценить погрешность, с которой было выполнено это измерение. Конечный результат измерения любой величины, обозначим ее X , принято записывать в следующей форме:

$$X = X_{\text{cp}} \pm \Delta X. \quad (1.6)$$

Эту запись следует понимать следующим образом: *наиболее вероятным значением измеряемой величины* является $X_{\text{ср}}$ – среднее значение, полученное в результате опыта, в то же время, измеряемая величина с высокой вероятностью попадает в пределы, так называемого, доверительного интервала:

$$X_{\text{ср}} - \Delta X \leq X \leq X_{\text{ср}} + \Delta X. \quad (1.7)$$

Чем уже доверительный интервал, тем выше точность проведенного измерения. Оценка доверительного интервала позволяет не только судить о качестве проведенного опыта.

1.2. Прямое измерение. Обработка результатов прямого измерения

Рассмотрим порядок проведения прямого измерения и правила обработки результатов прямого измерения.

Прежде всего, следует запомнить, что никогда нельзя ограничиваться единственным измерением, необходимо сделать как минимум несколько измерений, чтобы накопить массив данных. Общее количество измерений, которые следует выполнить, экспериментатор определяет с учетом множества факторов: наличие времени на проведение измерений, имеющихся средств, необходимой точности, особенностей изучаемого объекта, личного опыта, интуиции и т.д. В лабораторном практикуме вследствие недостатка времени часто ограничиваются 3-5 измерениями (это количество результатов, которое должно остаться для обработки после исключения промахов). Как уже отмечалось ранее, случайные ошибки равновероятны по знаку. Это означает, что при проведении достаточно большого числа опытов примерно в половине опытов будут присутствовать положительные ошибки, а в другой половине опытов – отрицательные. При вычислении среднего арифметического положительные и отрицательные ошибки взаимно компенсируются, и мы получим более точное значение

измеряемой величины, которое будем далее называть средним. Т.о. среднее значение измеряемой величины вычисляется по формуле:

$$X_{\text{ср}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} X_i. \quad (1.8)$$

При вычислении $X_{\text{ср}}$ встает вопрос о том, сколько значащих цифр необходимо оставить в вычисленном результате. Чтобы ответить на этот вопрос необходимо воспользоваться правилами приближенных вычислений (см. Приложение 1.1).

Для определения погрешности выполненного измерения сначала вычислим среднюю случайную ошибку по следующей формуле:

$$\Delta \bar{X}_{\text{сл}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} |X_i - X_{\text{ср}}|. \quad (1.9)$$

Разность между результатом каждого измерения и средним значением берется по модулю, чтобы при суммировании вычисленные случайные ошибки не компенсировались. После этого вычисляем полную ошибку ΔX , с которой была измерена величина X , по формуле:

$$\Delta X = \sqrt{(\Delta \bar{X}_{\text{сл}})^2 + (\Delta \bar{X}_{\text{инстр}})^2}, \quad (1.10)$$

здесь $\Delta \bar{X}_{\text{инстр}}$ – инструментальная ошибка. **В учебных лабораториях полученную величину абсолютной погрешности принято округлять до одной значащей цифры. Если первая цифра 1 или 2, то нужно при округлении оставлять две значащие цифры.**

Число значащих цифр, которые оставляют в приближенном числе, однозначно определяется его абсолютной погрешностью. Последняя значащая цифра числа должна находиться в том же разряде, что и последняя значащая цифра абсолютной погрешности.

Окончательный результат опыта будет представлен в виде:

$$X = X_{\text{ср}} \pm \Delta X, \quad (1.11)$$

где $X_{\text{ср}}$ – среднее значение измеренной величины, ΔX – полная ошибка проведенного измерения.

1.3. Косвенные измерения. Обработка результатов косвенного измерения

Правила проведения и обработки результатов косвенных измерений рассмотрим на следующем примере. Пусть интересующая нас величина Y определяется по формуле:

$$Y = \frac{\pi a^2}{bc^3}, \quad (1.12)$$

в которой величины a , b и c определяются прямыми измерениями. Наша задача – найти среднее значение косвенно измеряемой величины $Y_{\text{ср}}$ и погрешность, с которой она измерена ΔY .

Сначала выполняются прямые измерения величин a , b и c по методике, описанной в разделе 2, и проводится их обработка. В результате определяются наилучшие значения $a_{\text{ср}}$, $b_{\text{ср}}$ и $c_{\text{ср}}$ и полные погрешности с которыми определены эти величины Δa , Δb и Δc . После этого рассчитывается наилучшее значение величины Y путем подстановки в расчетную формулу (1.12) наилучших значений величин, измеренных прямыми измерениями:

$$Y_{\text{ср}} = \frac{\pi a_{\text{ср}}^2}{b_{\text{ср}} c_{\text{ср}}^3}. \quad (1.13)$$

При вычислении $Y_{\text{ср}}$ число оставляемых в результате значащих цифр определяется правилами приближенных вычислений (см. Приложение 1.1).

Для расчета погрешности косвенно измеряемой величины необходимо продифференцировать рабочую формулу.

Дифференцирование позволяет определить, как изменяется величина Y при отклонениях (погрешностях) величин a , b и c от их наилучших значений. В соответствии с правилами дифференцирования, полный дифференциал функции $Y=f(\pi, a, b, c)$ вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} dY &= \frac{\partial f}{\partial \pi} d\pi + \frac{\partial f}{\partial a} da + \frac{\partial f}{\partial b} db + \frac{\partial f}{\partial c} dc = \\ &= \frac{a^2}{bc^3} d\pi + \frac{\pi 2a}{bc^3} da - \frac{\pi a^2}{b^2 c^3} db - 3 \frac{\pi a^2}{bc^4} dc. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Здесь значками $\frac{\partial f}{\partial \pi}$ и т.д. обозначены частные производные от функции $Y=f(\pi, a, b, c)$ по всем переменным. (Напомним, что частная производная вычисляется при условии, что все величины, кроме той, по которой вычисляется производная, остаются фиксированными). После выполнения процедуры дифференцирования с выражением (1.14), полученным для полного дифференциала, необходимо выполнить следующие действия:

1) Перейти от **дифференциалов** величин (бесконечно малых изменений) к **малым** изменениям. Формально это означает замену обозначений дифференциала d на значки Δ :

$$\Delta Y = \frac{a^2}{bc^3} \Delta \pi + \frac{\pi 2a}{bc^3} \Delta a - \frac{\pi a^2}{b^2 c^3} \Delta b - 3 \frac{\pi a^2}{bc^4} \Delta c. \quad (1.15)$$

2) Все знаки в числителях заменить на “+”, т.к. погрешности всегда рассчитываются по наихудшему сценарию, то при подсчете все ошибки следует суммировать.

$$\Delta Y = \frac{a^2}{bc^3} \Delta \pi + \frac{\pi 2a}{bc^3} \Delta a + \frac{\pi a^2}{b^2 c^3} \Delta b + 3 \frac{\pi a^2}{bc^4} \Delta c. \quad (1.16)$$

3) В формуле (1.16) в качестве величин a , b и c следует использовать их средние значения $a_{\text{ср}}$, $b_{\text{ср}}$, $c_{\text{ср}}$, а вместо величин Δa , Δb и Δc следует подставить полные погрешности с которыми эти величины были измерены.

$$\Delta Y = \frac{a_{\text{ср}}^2}{b_{\text{ср}}c_{\text{ср}}^3} \Delta \pi + \frac{\pi 2a_{\text{ср}}}{b_{\text{ср}}c_{\text{ср}}^3} \Delta a + \frac{\pi a_{\text{ср}}^2}{b_{\text{ср}}^2c_{\text{ср}}^3} \Delta b + 3 \frac{\pi a_{\text{ср}}^2}{b_{\text{ср}}c_{\text{ср}}^4} \Delta c. \quad (1.17)$$

Особо следует пояснить учет погрешности, вносимой в конечный результат, подстановкой числа π . Строго говоря, число π – это константа, поэтому при вычислении полного дифференциала величины Y дифференциал $d\pi$ должен быть равен нулю. Однако, на практике, при проведении вычислений, невозможно подставить точное значение числа π . Число π либо обрывают на каком-то знаке, либо округляют, а это вносит погрешность в конечный результат. Поэтому при наличии в формуле таких постоянных, как π , e и т.п., необходимо учитывать погрешность, обусловленную их неточной подстановкой. Поэтому при дифференцировании величину π рассматривают как переменную и, **в качестве величины $\Delta \pi$, следует подставить половину единицы последнего разряда, учтенного при подстановке числа π .** Например, если вместо числа π подставлено значение 3,14, то последний учтенный разряд – сотые, а половина единицы последнего учтенного разряда – 0,005. В то же время, следует понимать, что при подстановке числа π , как правило, не представляет затруднений использовать более точное значение числа π , уменьшая тем самым величину $\Delta \pi$ и вносимую в окончательный результат погрешность. Оценка погрешности, вносимой подстановкой неточного числа π , делается, прежде всего, для того, чтобы выяснить с точностью до какого порядка нужно подставить число π , чтобы вносимая при этом в окончательный результат погрешность была мала по сравнению с другими погрешностями, обусловленными прямыми измерениями.

Из приведенной выше методики обработки результатов косвенного измерения видно, что расчет погрешности косвенного измерения может

оказаться довольно сложной и громоздкой задачей. **В некоторых случаях процедуру вычисления полного дифференциала можно упростить, если предварительно прологарифмировать рабочую формулу.** Логарифмирование целесообразно выполнять, если расчетная формула включает только операции умножения, деления и возведения в степень. В рассмотренном нами примере формула (1.12) удобна для применения предварительного логарифмирования. Поэтому прологарифмируем соотношение (1.12):

$$\ln Y = \ln \pi + 2 \ln a - \ln b - 3 \ln c, \quad (1.18)$$

учитывая, что дифференциал логарифмической функции имеет вид:

$$d(\ln Y) = \frac{dY}{Y}, \quad (1.19)$$

выполним дифференцирование соотношения (1.18):

$$\frac{dY}{Y} = \frac{d\pi}{\pi} + 2 \frac{da}{a} - \frac{db}{b} - 3 \frac{dc}{c}. \quad (1.20)$$

В полученном соотношении (1.20), содержащем полный дифференциал dY , как уже отмечалось ранее, выполняем следующие действия: 1) заменяем дифференциалы на малые величины, т.е. заменяем d на Δ ; 2) все знаки в числителях меняем на “+”; 3) вместо величин подставляем их наилучшие значения, вместо Δa , Δb и Δc – полные погрешности, с которыми были измерены эти величины, а вместо $\Delta \pi$ – половину единицы последнего учтенного разряда. Т.е. выражение (1.20) после указанных изменений примет вид:

$$\varepsilon_Y = \frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta \pi}{\pi} + 2 \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + 3 \frac{\Delta c}{c}. \quad (1.21)$$

Причем величина $\frac{\Delta Y}{Y_{\text{ср}}}$ представляет собой не что иное, как относительную погрешность ε_Y , с которой определена величина Y . Абсолютная погрешность ΔY легко вычисляется по формуле:

$$\Delta Y = \varepsilon_Y \cdot Y_{\text{ср}}. \quad (1.22)$$

Окончательный результат косвенного измерения записывается в виде:

$$Y = Y_{\text{ср}} \pm \Delta Y. \quad (1.23)$$

1.4. Правила округления и записи результата измерения

При обработке данных физического эксперимента приходится иметь дело с точными и приближенными числами.

Точными числами являются все коэффициенты и показатели степени в формулах, коэффициенты, отражающие кратность единиц измерения, числа, заданные определениями и т.д. Так, в формуле объёма шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, коэффициент $\frac{4}{3}$ и показатель степени 3 являются точными. Погрешность точных чисел равна нулю.

К приближённым числам относятся результаты измерений различных величин, округлённые значения точных величин, табличные значения математических, физических, химических постоянных и других величин. **Значащими цифрами** приближенного числа называются все его цифры, в том числе и нули, если они не расположены в начале числа. При этом нули, следующие из множителя 10^n , не учитываются. Так числа 0,9040, 0,0172, $18 \cdot 10^2$ имеют четыре, три и две значащих цифры соответственно.

Приближенные числа можно округлять, т. е. уменьшать количество значащих цифр. При этом руководствуются следующими правилами: если первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то последняя из сохраняемых цифр не изменяется; если же первая из отбрасываемых цифр больше или равна 5, то последняя из сохраняемых цифр увеличивается на единицу. Поэтому

абсолютная погрешность округлённого числа не превышает половины единицы последнего сохранённого разряда ($\pi=3.14$, $\Delta\pi =0.005$, $g=9.8 \text{ м/с}^2$, $\Delta g=0.05 \text{ м/с}^2$).

Число значащих цифр, которые оставляют в приближённом числе, однозначно определяется его абсолютной погрешностью. Последняя значащая цифра числа должна находиться в том же разряде, что и последняя значащая цифра абсолютной погрешности. **В учебных лабораториях полученную величину абсолютной погрешности принято округлять до одной значащей цифры. Если первая цифра 1 или 2, то нужно при округлении оставлять две значащие цифры.**

В конечном результате рекомендуется выделять десятичный порядок числа, т. е. первая значащая цифра результата должна находиться в разряде единиц, а правильный порядок числа достигается умножением на десять в необходимой для этого степени. Такой же множитель должна иметь и абсолютная погрешность. Например, вместо числа 128455 ± 720 рекомендуется писать $(1.285 \pm 0.007) \cdot 10^5$.

Окончательный результат измерений принято записывать в виде:

$$X = (X_n \pm \Delta X) \cdot 10^n$$

Примечание: при проведении промежуточных вычислений пользуются правилами приближённого определения количества сохраняемых значащих цифр (см. Приложение 1.1).

1.5. Оформление отчета

Отчет по лабораторной работе оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ на техническую документацию и должен содержать:

1. Название работы.
2. Цель работы.
3. Перечень приборов и принадлежностей.
4. Описание и схему лабораторной установки.

5. Физическую модель изучаемого явления.
6. Математическую модель изучаемого явления.
7. Таблицы результатов измерений.
8. Результаты вычисления измеряемых величин и их погрешности.
9. Графики.
10. Выводы.

1.5.1. Правила построения графиков

1. График строится на миллиметровой бумаге.
2. При построении графиков значение функции откладываются по оси ординат, значение аргумента по оси абсцисс.
3. На каждой из осей приводят только тот интервал изменения

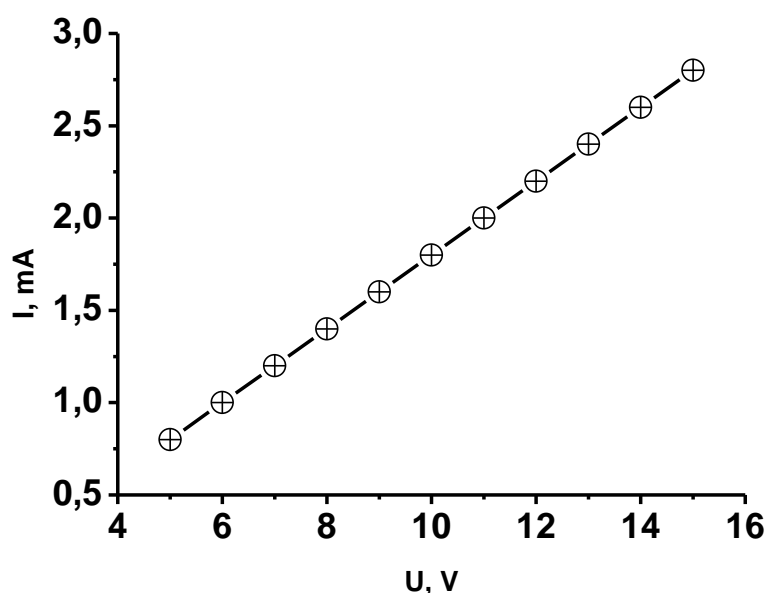


Рисунок 1.2. Пример построения графика зависимости силы тока I от напряжения U .

соответствующей физической величины, в котором велось исследование. Причём совсем не обязательно, чтобы отсчёт начинался с нуля (рис. 1.2).

Шкалы на осях оцифровывают в соответствии с выбранным масштабом. Масштабы на каждой из осей выбирают независимо друг от друга.

4. На осях указывают обозначения и единицы измерения соответствующих физических величин. В случае очень больших или очень малых величин множители типа 10^n записываются на осях рядом с обозначением соответствующей физической величины ($U, 10^3, V$).

5. Точки на график наносятся карандашом. Кривую по нанесённым точкам проводят плавно, без изломов и перегибов. Не следует стремиться проводить кривую через каждую точку. Она должна располагаться так, чтобы по обе стороны от нее было приблизительно равное количество экспериментальных точек. Отклонение точек от кривой отражает наличие погрешностей измерений.

6. Если на одном графике строят несколько кривых, то используют различные линии (штриховые, сплошные и т.д.).

7. Поведение графика должно быть обосновано и объяснено.

1.5.2. Правила оформления таблиц

Данные, полученные в эксперименте, заносятся в таблицу. При оформлении и заполнении таблицы необходимо следовать следующим требованиям:

1. Колонки или строки таблицы должны быть озаглавлены. В заголовке необходимо указать название величины или ее буквенное обозначение, а также ее размерность ($m, кг$).

2. Таблица заполняется только численными значениями величин. Если числа данной колонки имеют общий множитель, то его нужно вынести в заголовок таблицы ($p \cdot 10^5, Па$).

3. При отсутствии данных в графах таблиц следует ставить прочерк.

4. Если в отчете содержится более одной таблицы, то над таблицей справа помещают слово "Таблица" с порядковым номером.

Таблица 1.1

№ п/п	$\rho \cdot 10^3$, кг/м ³	$l \cdot 10^{-2}$, м	$d \cdot 10^{-2}$, м
1			
2			
3			
4			

Приложение 1.1.

Правила проведения приближенных вычислений.

Правила приближённого определения количества сохраняемых значащих цифр при вычислениях:

1) при сложении и вычитании приближённых чисел в результате следует сохранить столько десятичных знаков, сколько их имеет приближенное число с наименьшим числом десятичных знаков

$$6.28+13.1+8.482=24.862 = 24.9$$

2) при умножении и делении приближённых чисел следует сохранять в результате столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное число с наименьшим числом значащих цифр $346 \cdot 5.2 = 1799.2 = 18 \cdot 10^2$

3) при возведении в степень (извлечении корня) в результате сохраняется столько значащих цифр, сколько их имеет возводимое в степень приближенное число

$$0.37^2 = 0.1369 \approx 0.14$$

$$\sqrt{5.208} = 2.282$$

4) в мантиссе логарифма приближённого числа сохраняется столько значащих цифр сколько их имеет само число. Аналогичное правило справедливо и при нахождении числа по логарифму: количество значащих цифр в искомом числе должно быть равным их количеству в мантиссе. Так

$$\lg 22.15 = 1.345 \text{ и если } \lg x = 0.649, \text{ то } x = 4.46.$$

2. ИЗМЕРЕНИЕ МАССЫ ТЕЛА КОСВЕННЫМ МЕТОДОМ

Цель работы.

1. Определить массу тела правильной геометрической формы косвенным методом.
2. Изучить методику измерений с помощью миллиметровой линейки, штангенциркуля (микрометра).
3. Изучить методы определения погрешностей прямых и косвенных измерений.

Список литературы.

1. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин. Л.:Наука,1974.
2. Физический практикум. Под ред. Кембровского Г.С. Мн.: Университетское, 1986г.
3. Диденко Л.Г., Керженцев В.В. Пособие по обработке и оформлению работ общего физического практикума. М.: Изд-во МГУ,1971г.

Порядок теоретической подготовки к выполнению работы.

Изучить и законспектировать в тетрадь ответы на контрольные вопросы.

Вопросы к зачету:

1. Что такое масса тела? Единицы измерения массы тела?
2. Как рассчитывается цена деления и абсолютная погрешность приборов с нониусной шкалой?
3. Какие виды измерений вы знаете?
4. Какие виды погрешностей вы знаете?
5. Как рассчитываются случайные погрешности прямых измерений?
6. Как рассчитываются полные погрешности прямых измерений?

7. В чем заключается особенность расчета погрешностей косвенных измерений?
8. Правила приближенных вычислений.

2.1. Введение

Понятие массы тела было введено в механику И. Ньютоном во втором законе Ньютона:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \quad (2.1)$$

здесь масса – это коэффициент, связывающий действующую на тело результирующую силу \vec{F} и вызываемое ею ускорение. Определенная таким образом масса тела является мерой его инертности (чем больше масса тела, тем меньшее ускорение оно приобретает под действием постоянной силы) и называется инертной массой.

В теории гравитации Ньютона масса выступает как источник поля тяготения. Каждое тело создает поле тяготения, пропорциональное массе тела, и испытывает воздействие поля тяготения, создаваемого другими телами, сила которого также пропорциональна массе. Это поле вызывает притяжение тел с силой, определяемой законом всемирного тяготения, сформулированным Ньютоном:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2.2)$$

где G – гравитационная постоянная ($G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг²), r – расстояние между точечными телами, массы которых равны соответственно m_1 и m_2 .

Масса, входящая в закон (2.2), называется гравитационной массой (иногда эту массу называют "гравитационным зарядом" в силу аналогии закона тяготения и закона Кулона).

Определения инертной и гравитационной массы весьма различны. Инертная масса, характеризующая способность тела «сопротивляться» внешним воздействиям, играет пассивную роль. Гравитационная масса порождает притяжение, то есть является активным началом. Однако, благодаря наличию свободного коэффициента G – гравитационной постоянной, определяемой экспериментально, гравитационная масса численно равна инертной массе. Этот фундаментальный факт носит название принципа эквивалентности. Равенство инертной и гравитационной массы позволяет определять массу тела на рычажных весах.

Понятие массы тела приобрело более глубокий смысл в специальной теории относительности А. Эйнштейна, рассматривающей движение тел с очень большими скоростями. Согласно этой теории масса тела (частицы) связана с его полной энергией соотношением:

$$E_{\text{полн}} = mc^2, \quad (2.3)$$

где m – масса покоя, c – скорость света. Таким образом, масса тела является еще и мерой его полной энергии.

Единицей измерения массы в системе СИ является килограмм (1 кг). Массы атомов и молекул измеряют в атомных единицах массы (1 а.е.м. $\approx 1.66 \cdot 10^{-27}$ кг).

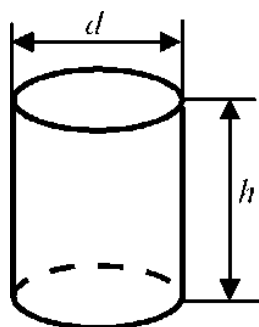


Рисунок 2.1.

В данной работе необходимо косвенным методом измерить массу тела правильной формы. Исследуемое тело – деревянный цилиндр (рис. 2.1).

При проведении измерения используются следующие физические предположения и допущения: форма тела – прямой цилиндр, распределение вещества по объему – равномерное, влияние изменения температуры – не учитывается. Вещество – дерево (бук).

Масса тела определяется косвенным путем с использованием следующей расчетной формулы:

$$m = \rho V = \rho \pi \frac{d^2}{4} h, \quad (2.4)$$

здесь ρ – плотность дерева, d – диаметр цилиндра, h – высота цилиндра.

Прямые измерения сводятся к определению линейных размеров цилиндра (d и h). Затем, используя табличное значение плотности сухой древесины $\rho=650 \text{ кг/м}^3$, нужно вычислить массу цилиндра. В результате опыта необходимо найти среднее (наиболее вероятное) значение массы цилиндра и оценить погрешность, с которой измерена масса цилиндра. Окончательный результат должен быть представлен в виде:

$$m = m_{\text{ср}} \pm \Delta m. \quad (2.5)$$

2.2. Особенности проведения измерений

К простейшим измерительным приборам, служащим для измерения линейных размеров, относятся линейка, штангенциркуль, микрометр. Каждый из этих приборов имеет равномерную шкалу. Расстояние между соседними штрихами шкалы называется ценой деления c .

Измерительная линейка. Для измерения линейных размеров с невысокой точностью применяются измерительные линейки. Обычно цена деления линейки $c=1 \text{ мм}$. Абсолютная погрешность измерений (инструментальная погрешность) равна половине цены деления: $\Delta_{\text{инстр}} = \frac{c}{2} = 0.5 \text{ мм}$.

Штангенциркуль (рис. 2.2) представляет собой линейку 1 с неподвижной ножкой 2. По линейке перемещается дополнительная шкала (нониус) 3 с n делениями. Цена деления линейки $c=1 \text{ мм}$. Цена деления нониусной шкалы зависит от числа делений нониуса n и цены деления основной шкалы и определяется по формуле:

$$C = \frac{c}{n}. \quad (2.6)$$

Абсолютная приборная (инструментальная) погрешность штангенциркуля равна половине цены деления нониусной шкалы:

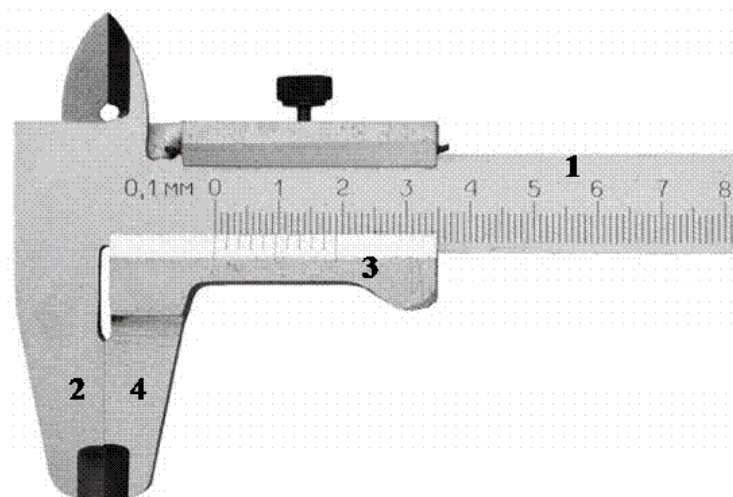


Рисунок 2.2.

$$\Delta_{\text{инстр}} = \frac{C}{2}. \quad (2.7)$$

(в нашем случае $\Delta_{\text{инстр}} = 0.5 \cdot 0.1 = 0.05$ мм). При измерении предмет помещают между ножками 2 и 4, снимают отсчет по шкале и находят измеряемую длину по формуле:

$$L = (kc + mC) \text{ мм}, \quad (2.8)$$

где k – число целых наименьших делений основной шкалы до нулевого штриха нониусной шкалы, m – номер деления нониуса, которое совпадает с одним из делений основной шкалы.

Микрометр состоит из металлической скобы 1 с упором 2, стебля 3, барабана 4, микрометрического винта 5 и трещотки 6 (рис. 2.2). На стебле 3 нанесена основная шкала. Цена деления основной шкалы $c = 0.5$ мм. На барабане 4 нанесено 50 делений нониусной шкалы 7 ($n = 50$). Точность

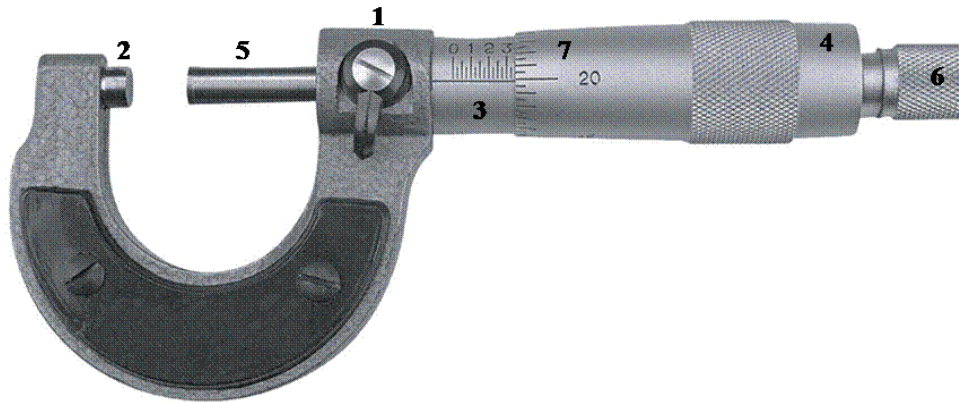


Рисунок 2.3.

микрометра и его абсолютная погрешность определяются также, как и для штангенциркуля: $C = c/2 = \frac{0.5}{50} = 0.01$ мм; $\Delta_{\text{инстр}} = 0.5 \cdot C = 0.005$ мм.

При измерении предмет располагается между упором 2 и микрометрическим винтом 5. С помощью головки 6 винт перемещают до тех пор, пока он коснется измеряемого предмета и сработает трещотка. Численное значение длины измеряемого предмета снова определяем по формуле (2.8), где k – число видимых делений основной шкалы, m – номер деления шкалы нониуса, которое совпадает с осью основной шкалы.

В работе предлагается выполнить измерения с разными измерительными приборами: сначала с помощью миллиметровой линейки и рассчитать массу цилиндра косвенным путем, а затем с помощью более точного прибора – штангенциркуля или микрометра и тоже рассчитать массу цилиндра. Затем следует сравнить результаты первого и второго измерений массы и сделать выводы относительно точности измерений в первом и во втором случаях.

При проведении измерений следует строго руководствоваться правилами выполнения прямых и косвенных измерений, изложенными во введении в лабораторный практикум.

Напомним, что никогда нельзя ограничиваться единственным измерением. Всегда следует делать как минимум 3-5 измерений. Результаты всех измерений заносятся в заранее приготовленные таблицы.

2.3. Обработка результатов измерений

Сначала обрабатываются результаты прямых измерений. Как уже отмечалось во введении в лабораторный практикум, случайные ошибки равновероятны по знаку. Это означает, что при проведении достаточно большого числа опытов примерно в половине опытов будут присутствовать положительные ошибки, а в другой половине опытов – отрицательные. При вычислении среднего арифметического положительные и отрицательные ошибки взаимно компенсируются, и мы получим более точное значение измеряемой величины, которое будем далее называть средним, поэтому наилучшее значение измеряемой величины вычисляется как среднее арифметическое всех результатов измерений, оставленных для дальнейшей обработки (промахи должны быть исключены из рассмотрения). Например, при измерении величины X среднее значение вычисляется по формуле:

$$X_{\text{ср}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} X_i. \quad (2.9)$$

Для определения погрешности выполненного измерения сначала вычислим среднюю случайную ошибку по следующей формуле:

$$\Delta \bar{X}_{\text{сл}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} |X_i - X_{\text{ср}}|. \quad (2.10)$$

Разность между результатом каждого измерения и наилучшим значением берется по модулю, чтобы при суммировании вычисленные случайные ошибки не компенсировались. После этого рассчитаем ошибку ΔX , с которой была измерена величина X по формуле:

$$\Delta X = \sqrt{(\Delta \bar{X}_{\text{сл}})^2 + (\Delta \bar{X}_{\text{инстр}})^2}. \quad (2.11)$$

Окончательный результат опыта будет представлен в виде:

$$X = X_{\text{ср}} \pm \Delta X. \quad (2.12)$$

После обработки результатов измерений размеров цилиндра должны быть получены наилучшие значения диаметра $d_{\text{ср}}$ и высоты $h_{\text{ср}}$ цилиндра, а также полные погрешности, с которыми они были определены – Δd и Δh .

Наилучшее значение массы цилиндра определяется путем подстановки в расчетную формулу (2.4) наилучших значений диаметра и высоты цилиндра:

$$m_{\text{ср}} = \rho \pi \frac{d_{\text{ср}}^2}{4} h_{\text{ср}}. \quad (2.13)$$

Для определения погрешности, с которой измерена масса цилиндра, необходимо продифференцировать рабочую формулу (2.4). Т.к. в данной формуле присутствуют лишь операции умножения, деления и возведения в степень, то для облегчения процедуры дифференцирования формулу предварительно лучше прологарифмировать:

$$\ln m = \ln \rho + \ln \pi - 2 \ln d - \ln 4 + \ln h. \quad (2.14)$$

Теперь дифференциал выражения (2.14) легко вычисляется:

$$\frac{dm}{m} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\pi}{\pi} - 2 \frac{d(d)}{d} + \frac{dh}{h}. \quad (2.15)$$

В выражении (2.15) дифференциалы заменяем на малые изменения величин, все знаки в числителях меняем на “+”, вместо самих величин подставляем их средние значения, а вместо малых изменений величин – полные ошибки, с которыми были определены эти величины.

$$\frac{\Delta m}{m_{\text{ср}}} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta \pi}{\pi} + 2 \frac{\Delta d}{d_{\text{ср}}} + \frac{\Delta h}{h_{\text{ср}}}. \quad (2.16)$$

Если в таблице, из которой взято значение плотности древесины, не указана погрешность, с которой это значение определено, то будем полагать

$\Delta\rho \approx 0.5 \text{ кг/м}^3$, а вместо $\Delta\pi$, подставим половину единицы последнего разряда учтенного при подстановке числа π , т.е. $\Delta\pi = 0.005$.

Формула (2.16) позволяет вычислить как относительную ошибку ε_m с которой определена масса цилиндра, так и абсолютную ошибку Δm , с которой измерена масса цилиндра:

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta m}{m_{\text{ср}}}; \quad \Delta m = \varepsilon_m \cdot m_{\text{ср}}. \quad (2.17)$$

Окончательный результат опыта следует представить в виде:

$$m = m_{\text{ср}} \pm \Delta m. \quad (2.18)$$

2.4. Оформление отчета

Результаты выполнения лабораторной работы представляются в виде отчета оформленного в соответствии с требованиями ГОСТ на техническую документацию. **Отчет должен содержать:**

Титульный лист с названием работы (образец оформления титульного листа см. в приложении).

Цель работы.

Перечень приборов и принадлежностей.

Описание и схему лабораторной установки.

Физическую модель изучаемого явления.

Математическую модель изучаемого явления.

Таблицы результатов измерений.

Результаты вычисления измеряемых величин и их погрешности.

Графики.

Выводы.

2.5. Порядок выполнения работы

1. Изучить введение в лабораторный практикум и методическое пособие к лабораторной работе №1, ознакомиться с методикой проведения

измерений с помощью штангенциркуля и микрометра. Рассчитать абсолютные инструментальные погрешности линейки, штангенциркуля и микрометра (см. п.2.2 данной работы).

2. Несколько раз (3÷5 раз) измерить **с помощью линейки** диаметр d и высоту h исследуемого тела. Замеры диаметра делать в разных направлениях, а высоты цилиндра в разных местах. Результаты измерений занести в таблицу 2.1.

Опыт 1: измерения линейкой.

Таблица 2.1.

№ п/п	$d, 10^{-3}$ м	$\Delta d, 10^{-3}$ м	$h, 10^{-3}$ м	$\Delta h, 10^{-3}$ м	$\Delta_{\text{инстр}}, 10^{-3}$ м
1					
2					
3					
4					
5					
Среднее	$d_{\text{ср}} =$	$\Delta \bar{d}_{\text{сл}} =$	$h_{\text{ср}} =$	$\Delta \bar{h}_{\text{сл}} =$	$\Delta_{\text{инстр}} =$
Полные ошибки	$\Delta d =$		$\Delta h =$		

3. Рассчитать средние значения $d_{\text{ср}}$ и $h_{\text{ср}}$ и средние случайные абсолютные погрешности $\Delta \bar{d}_{\text{сл}}$ и $\Delta \bar{h}_{\text{сл}}$ (см. п.2.3 данной работы), определить полные погрешности, с которыми измерены диаметр d и высота h исследуемого тела.

4. Сделать замеры диаметра d цилиндра **с помощью штангенциркуля (микрометра)** по разным направлениям и высоты h цилиндра в разных местах (3-5 раз). Результаты измерений занести в таблицу 2.2.

Опыт 2: измерения штангенциркулем (микрометром).

Таблица 2.2.

№ п/п	$d, 10^{-3}$ м	$\Delta d, 10^{-3}$ м	$h, 10^{-3}$ м	$\Delta h, 10^{-3}$ м	$\Delta_{\text{инстр}}, 10^{-3}$ м
1					
2					
3					
4					
5					
Среднее	$d_{\text{ср}} =$	$\Delta \bar{d}_{\text{сл}} =$	$h_{\text{ср}} =$	$\Delta \bar{h}_{\text{сл}} =$	$\Delta_{\text{инстр}} =$
Полные ошибки	$\Delta d =$		$\Delta h =$		

5. Рассчитать средние значения $d_{\text{ср}}$ и $h_{\text{ср}}$ и средние случайные абсолютные погрешности $\Delta \bar{d}_{\text{сл}}$ и $\Delta \bar{h}_{\text{сл}}$ (см. п.2.3 данной работы), определить полные погрешности, с которыми измерены диаметр d и высота h исследуемого тела при измерении с помощью штангенциркуля или микрометра.

6. Рассчитать значение массы исследуемого тела, относительную и абсолютную погрешность косвенного определения массы для двух случаев (Опыт 1 и Опыт 2).

7. Записать окончательный результат в виде:

$$m = m_{\text{ср}} \pm \Delta m.$$

Отдельно при измерении линейкой и штангенциркулем (микрометром).

8. Проанализировать полученные результаты и сформулировать выводы.

Примечания:

1. В абсолютной погрешности оставляют одну значащую цифру, если это не 1 или 2, в противном случае в погрешности оставляют две значащие цифры.
2. Результат измерений записывается с таким количеством значащих цифр, чтобы последняя из них находилась в том же разряде, что и последняя значащая цифра абсолютной погрешности.

3. ДИНАМИКА УПРУГОГО СОУДАРЕНИЯ ШАРОВ

Цель работы.

1. Изучить теорию упругого и неупругого ударов.
2. Определить продолжительность удара шаров.
3. Определить зависимость силы удара от скорости соударения шаров.

Список литературы.

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики, т. 1, §§ 10-12, 24-29. М.: Наука, 1989.
2. Трофимова Т.И. Курс физики §§ 6, 9, 11-13, 15. М.: Высшая школа, 1998.
3. Савельев И.В. Курс общей физики, т.1, §§ 8, 9, 18-21, 24, 27, 28. М.: Наука, 1987.
4. Джилавдари И.З. Методические указания к выполнению л.р. № 124. Минск: БГПА, 2001.
5. Васюков В.И. Изучение явления центрального удара шаров (методические указания к выполнению лабораторной работы.). М.: МИФИ, 1976.

Порядок теоретической подготовки.

Изучить и законспектировать в тетрадь ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы.

1. Понятие замкнутой механической системы. Внешние и внутренние силы в механической системе.
2. Импульс тела, импульс механической системы, импульс силы .
3. Второй закон Ньютона в импульсной форме.
4. Консервативные и неконсервативные силы: определения и примеры.

5. Закон сохранения импульса.
6. Виды механической энергии. Закон сохранения энергии .
7. Абсолютно упругий и абсолютно неупругий удар.
8. Закон сохранения импульса и закон сохранения энергии для абсолютно упругого удара.
9. Вывод рабочих формул для скорости соударения шаров и силы удара.

Приборы и принадлежности.

1. Частотомер-хронометр ЧЗ-32.
2. Источник тока.
3. Установка с двумя шарами.
4. Линейка и штангенциркуль.

Отчёт по лабораторной работе должен содержать:

- 1) цель работы
- 2) перечень приборов и принадлежностей к работе
- 3) схему лабораторной установки
- 4) физическую модель
- 5) математическую модель
- 6) таблицы результатов измерений
- 7) результаты расчётов и погрешности
- 8) график зависимости силы удара от скорости соударения шаров
- 9) выводы

3.1. Теоретическое введение

Общие определения: механическая система, импульс, энергия

Совокупность тел, выделенных для рассмотрения, называется механической системой. Тела, образующие механическую систему, могут взаимодействовать как между собой, так и с телами, не принадлежащими данной системе. В соответствии с этим силы, действующие на тела системы,

делят на внутренние и внешние. *Внутренними* называются силы, с которыми на данное тело воздействуют остальные тела системы, внешними – силы, обусловленные воздействием тел, не принадлежащих системе. В случае, если внешние силы отсутствуют, система называется замкнутой.

Произведение массы тела m на его скорость \vec{v} называется импульсом тела \vec{p} :

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (3.1)$$

Определение (3.1) справедливо для материальных точек и протяженных тел, движущихся поступательно. В случае протяженного тела, движущегося непоступательно, нужно представить тело как совокупность материальных точек с массами Δm_i , определить импульсы $\Delta m_i \vec{v}_i$ этих точек и затем сложить эти импульсы векторно. В результате получится полный импульс тела:

$$\vec{p} = \sum_i \Delta m_i \vec{v}_i.$$

Совершенно аналогично определяется импульс механической системы: он равен векторной сумме импульсов тел, составляющих эту систему.

Энергия – универсальная количественная мера движения и взаимодействия всех видов материи. С различными формами движения материи связывают различные формы энергии: механическую, тепловую, электромагнитную, ядерную и др. Когда речь идет о механической энергии, то выделяют две ее разновидности: кинетическую и потенциальную энергии.

Кинетическая энергия механической системы T – это энергия механического движения этой системы:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i \vec{v}_i^2.$$

Потенциальная энергия U – механическая энергия системы тел, определяемая их взаимным расположением и характером сил взаимодействия между ними.

Полная механическая энергия E системы есть сумма потенциальных и кинетических энергий тел, составляющих эту систему:

$$E = T + U.$$

3.2. Второй закон Ньютона

Второй закон Ньютона – основной закон динамики поступательного движения – отвечает на вопрос, как изменяется механическое движение материальной точки (тела) под действием приложенных к ней сил. Запишем сначала классическую формулировку этого закона:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \quad (3.2)$$

т.е. ускорение \vec{a} , приобретаемое материальной точкой, пропорционально вызывающей его силе \vec{F} , совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки m . Воспользуемся теперь определением ускорения:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad (3.3)$$

и перепишем (3.2) как:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (3.4)$$

В классической механике (т.е. при скоростях движения тел много меньших скорости света) масса тела является постоянной величиной, и ее

можно внести под знак производной в формуле (3.4). Тогда можно записать, что:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (3.5)$$

Выражение (3.5) представляет собой *второй закон Ньютона в импульсной форме*: скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на нее силе. Величину $\vec{F} dt$ (т.е. *произведение силы на время ее действия*) называют *импульсом силы*. Если на материальную точку (тело) действуют несколько сил, то под величиной \vec{F} в формуле (3.5) мы понимаем их равнодействующую. Если же речь идет о механической системе, то уравнение (3.5) следует записывать для каждого тела этой системы.

Необходимо уточнить, почему мы воспользовались определением мгновенного ускорения (формула (3.3)). Дело в том, что сила или равнодействующая сил может с течением времени изменяться как по величине, так и по направлению. Поэтому запись второго закона Ньютона в виде (3.5) (т.е. для бесконечно малого приращения времени dt) позволяет считать силу \vec{F} постоянной величиной за этот промежуток времени. Если же мы хотим получить среднее значение этой силы $\langle \vec{F} \rangle$ за какой-то определенный промежуток времени τ , то формулу (3.5) нужно проинтегрировать:

$$\int_0^\tau \vec{F} dt = \int_{p_1}^{p_2} d\vec{p} \rightarrow \langle \vec{F} \rangle \cdot \tau = \vec{p}_2 - \vec{p}_1. \quad (3.6)$$

3.3. Консервативные и неконсервативные силы

Если частица в каждой точке пространства подвержена воздействию других тел, то говорят, что эта частица находится в поле сил. Например, частица вблизи поверхности Земли находится в поле сил тяжести – в каждой точке на нее действует сила $\vec{F}_{\text{тяж}} = m\vec{g}$.

В качестве второго примера рассмотрим заряженную частицу, которая находится в электрическом поле, возбуждаемом неподвижным точечным зарядом q . Это поле характерно тем, что направление силы, действующей на частицу в любой точке пространства, проходит через неподвижный центр (заряд q), а величина силы зависит только от расстояния до этого центра. Поле сил, обладающее такими свойствами, называется *центральным*.

Если во всех точках поля силы, действующие на частицу, одинаковы по величине и направлению, поле называется *однородным*. Поле, которое меняется со временем, называется *нестационарным*. Поле, остающееся постоянным во времени, называют *стационарным*.

Пусть на частицу действует некоторая сила \vec{F} . Скалярное произведение этой силы на малое перемещение частицы $d\vec{r}$ называют работой δA , совершаемой этой силой (рис. 3.1):

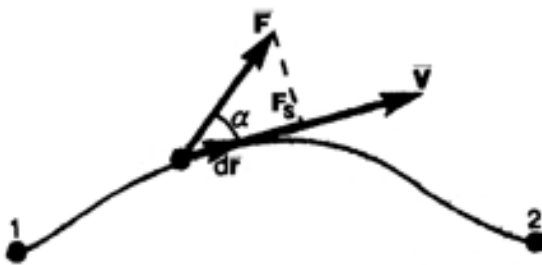


Рисунок 3.1.

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = F \cos \alpha \cdot ds = \quad (3.7)$$

$$= F_s ds,$$

где α – угол между векторами \vec{F} и $d\vec{r}$, $ds = |d\vec{r}|$ – элементарный путь, F_s – проекция вектора \vec{F} на вектор $d\vec{r}$. Работа A_{12} , которую совершает сила \vec{F} при движении частицы вдоль некоторой траектории от точки 1 до точки 2, находится интегрированием формулы (3.7):

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r}.$$

Консервативные силы можно определить двумя способами:

- как силы, работа которых не зависит от траектории, по которой частица переходит из одного положения в другое;
- как силы, работа которых на любой замкнутой траектории равна нулю.

Консервативными являются все силы, которые действуют на частицу со стороны стационарного однородного поля или центрального поля. В таких полях работа сил по перемещению частицы равна изменению ее потенциальной энергии. Приведем примеры консервативных сил.

1) Сила тяжести в любой точке имеет одинаковую величину и направление – вниз по вертикали. Таким образом, сила тяжести консервативна.

2) Упругие силы, возникающие при растяжении или сжатии пружины, являются центральными силами. Поэтому они консервативны.

3) Исходя из закона всемирного тяготения Ньютона, гравитационная сила притяжения двух точечных тел является центральной и поэтому консервативной.

4) Совершенно аналогично предыдущему примеру можно рассмотреть силу Кулона в электростатике. Она также консервативна.

Все силы, не являющиеся консервативными, называются неконсервативными. Приведем примеры неконсервативных сил.

1) Гироскопические силы, которые зависят от скорости материальной точки и действуют всегда перпендикулярно к этой скорости, неконсервативны. Примером таких сил служит сила Лоренца, которая действует со стороны магнитного поля на движущуюся в нем частицу.

2) Диссипативные силы, то есть силы, которые направлены всегда против относительной скорости тела и которые уменьшают его полную механическую энергию. Характерным примером диссипативных сил служат силы трения.

3.4. Закон сохранения импульса

Для вывода этого закона воспользуемся вторым законом Ньютона в импульсной форме (см. формулу (3.5)). Пусть у нас имеется механическая система, состоящая из двух материальных частиц. Обозначим внутренние силы, с которыми частицы действуют друг на друга, как \vec{F}_{12} и \vec{F}_{21} . Кроме

того, пускай на первую частицу действуют внешние силы, равнодействующую которых обозначим через \vec{F}_1 , а равнодействующая внешних сил для второй частицы равна \vec{F}_2 . Запишем для обеих частиц второй закон Ньютона:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_1, \quad (3.8)$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_2. \quad (3.9)$$

Теперь сложим формулы (3.8) и (3.9). Так как сумма внутренних сил механической системы по третьему закону Ньютона равна нулю, то получим:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad (3.10)$$

где через \vec{p} обозначен импульс механической системы. Таким образом, производная по времени от импульса механической системы равна сумме внешних сил, действующих на систему. Этот же вывод получается для любого количества частиц в системе. Если внешние силы отсутствуют (то есть система замкнута), то:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0, \text{ то есть } \vec{p} = \vec{p}_1(t) + \vec{p}_2(t) = \text{const}. \quad (3.11)$$

Выражение (3.11) и является *законом сохранения импульса: импульс замкнутой системы не изменяется с течением времени*. Однако импульс может сохраняться и для незамкнутой системы, если геометрическая сумма всех внешних сил равна нулю. В случае, когда сумма внешних сил нулю не равна, а равна нулю ее проекция на какое-либо направление, сохраняется составляющая импульса в этом направлении. Наконец, наличие в системе неконсервативных сил на величину полного импульса не влияет (в выводе

формулы (3.11) мы не уточняли какими – консервативными или неконсервативными – являются силы \vec{F}_{12} и \vec{F}_{21}).

Важно понимать, что хотя мы вывели этот закон из законов Ньютона, на самом деле он выполняется и для замкнутых систем микрочастиц, движения которых подчиняются законам квантовой механики и где законы Ньютона не всегда справедливы. Таким образом, этот закон носит универсальный характер. Он является следствием однородности пространства. Однородность пространства заключается в том, что при параллельном переносе в пространстве замкнутой системы тел как целого ее физические свойства и законы движения не изменяются.

3.5. Закон сохранения энергии

Воспользуемся той же системой двух материальных точек с массами m_1 и m_2 , что и в предыдущем случае. Пусть на первую материальную точку действует внутренняя консервативная сила \vec{F}_{12} , равнодействующая всех внешних консервативных сил \vec{F}_1 и равнодействующая всех внешних неконсервативных сил \vec{f}_1 . Для второй точки обозначим соответствующие силы как \vec{F}_{21} , \vec{F}_2 и \vec{f}_2 . Тогда:

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_1 + \vec{f}_1,$$

$$m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_2 + \vec{f}_2.$$

Двигаясь под действием сил, точки системы за интервал времени dt совершают перемещения $d\vec{r}_1$ и $d\vec{r}_2$. Умножим каждое из уравнений скалярно на соответствующее перемещение и, учитывая что $d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt$ ($i=1,2$), получим:

$$m_1 \vec{v}_1 d\vec{v}_1 - (\vec{F}_{12} + \vec{F}_1) d\vec{r}_1 = \vec{f}_1 d\vec{r}_1,$$

$$m_2 \vec{v}_2 d\vec{v}_2 - (\vec{F}_{21} + \vec{F}_2) d\vec{r}_2 = \vec{f}_2 d\vec{r}_2.$$

Сложим эти уравнения. Разберемся, что представляет каждое из получившихся слагаемых:

$$m_1 \vec{v}_1 d\vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 d\vec{v}_2 = d \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \right) = dT,$$

– это приращение кинетической энергии системы.

$$-\vec{F}_{12} d\vec{r}_1 - \vec{F}_{21} d\vec{r}_2 = dU_{\text{вз}},$$

– это приращение потенциальной энергии взаимодействия частиц.

$$-\vec{F}_1 d\vec{r}_1 - \vec{F}_2 d\vec{r}_2 = dU_{\text{внеш}},$$

– это приращение потенциальной энергии системы во внешнем поле консервативных сил.

$$\vec{f}_1 d\vec{r}_1 + \vec{f}_2 d\vec{r}_2 = \delta A_{\text{внеш}},$$

– это работа неконсервативных внешних сил.

Таким образом, мы приходим к выражению:

$$d(T + U_{\text{вз}} + U_{\text{внеш}}) = \delta A_{\text{внеш}}. \quad (3.12)$$

В формуле (3.12) выражение в скобках представляет собой полную механическую энергию системы E . Следовательно, изменение этой энергии при переходе из одного состояния в другое равно работе, совершенной при этом внешними неконсервативными силами. Если такие силы отсутствуют, то из (3.12) следует, что:

$$dE = 0 \text{ или } E = \text{const.} \quad (3.13)$$

Выражение (3.13) представляет собой закон сохранения полной механической энергии: полная механическая энергия системы, на тела которой действуют только консервативные силы (внутренние и внешние), остается постоянной. Если внешние консервативные силы отсутствуют ($U_{\text{внеш}}=0$), то этот закон можно переформулировать так: полная механическая энергия замкнутой системы, в которой действуют только консервативные силы, не меняется с течением времени.

Закон сохранения механической энергии связан с однородностью времени. Однородность времени проявляется в том, что физические законы не зависят от выбора начала отсчета времени.

В отличие от закона сохранения импульса, наличие внутренних неконсервативных сил приводит к нарушению закона сохранения полной механической энергии. В этом случае механическая энергия частично переходит в другие виды энергии. Например, при взаимном трении тел она превращается во внутреннюю энергию этих тел, то есть происходит их нагревание. Поэтому в самом общем виде закон сохранения энергии можно сформулировать так: энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой.

3.6. Основные виды ударов

Ударом называется кратковременное взаимодействие соприкасающихся тел, приводящее к изменению их движения. Явление удара протекает обычно за сотые и менее доли секунды. Время соударения тем меньше, чем меньше деформации тел. Так как при этом импульс тел изменяется на конечное значение, то в месте соударения развиваются соответствующие силы.

Процесс удара в общем случае разделяют на две фазы. Первая фаза – с момента соприкосновения тел до момента, когда относительная скорость

центров масс тел становится равной нулю. Вторая фаза – от этого последнего момента до момента, когда соприкосновение тел прекращается. С момента возникновения деформаций в месте соприкосновения тел начинают действовать силы, направленные противоположно относительным скоростям тел. Возникшие в результате действия сил ускорения уменьшают скорости тел до тех пор, пока они не станут одинаковыми, или, что то же, пока относительная скорость тел не станет равной нулю. При этом происходит переход части энергии механического движения тел в энергию деформации. С момента, когда относительная скорость стала равной нулю, начинается восстановление деформаций. Силы, продолжая действовать в прежнем направлении, сообщают теперь положительные ускорения. Скорости тел возрастают по абсолютной величине, их направление меняется на противоположное по сравнению с первоначальным. Наконец, тела расходятся, и удар заканчивается.

Прямая, совпадающая с нормалью к поверхности тел в точке их соприкосновения, называется *линией удара*. Удар называется *центральный*, если *линия удара проходит через центры масс тел*. Если векторы скоростей шаров до удара лежат на линии удара, то удар называется *прямым*, а если они не лежат на этой линии – *косым*.

Для определения величины потерь кинетической энергии удары делят на следующие виды:

Абсолютно упругим называют такой удар, при котором полная механическая энергия системы тел сохраняется.

В процессе абсолютно упругого удара тела сначала деформируются, их кинетическая энергия частично или полностью переходит в потенциальную энергию их упругой деформации. Затем, наоборот, тела полностью восстанавливают свою первоначальную форму и их потенциальная энергия полностью превращается в кинетическую. *При абсолютно упругом ударе выполняются закон сохранения механической энергии и закон сохранения импульса:*

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2},$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2,$$

где m_1 и m_2 – массы сталкивающихся тел, \vec{v}_1 , \vec{v}_2 , и \vec{u}_1 , \vec{u}_2 – их скорости до и после удара соответственно.

В реальности процесс соударения тел является *частично упругим или неупругим*. В телах возникает остаточная деформация, то есть тела не восстанавливают свою прежнюю форму, и кинетическая энергия частично или полностью теряется, превращаясь в тепловую. *При частично упругом ударе выполняется закон сохранения полной (механической и немеханической) энергии и закон сохранения импульса.*

Абсолютно неупругим ударом называется такой удар, при котором тела, после соударения либо двигаются с одинаковой скоростью, находясь в соприкосновении друг с другом и сохраняя деформации, приобретенные во время столкновения, либо покоятся. При абсолютно неупругом центральном ударе также выполняется закон сохранения полной энергии и закон сохранения импульса (при центральном ударе вращения тел не возникает):

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} + Q, \quad (3.14)$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u},$$

где в правой части первого уравнения (3.14) записаны кинетическая энергия поступательного движения образовавшейся системы тел и теплота, выделившаяся при ударе, а во втором уравнении – суммарный импульс системы после удара.

3.7. Элементарная теория упругого удара. Вывод рабочих формул

Рассмотрим элементарную теорию соударения одинаковых упругих шаров, подвешенных на нерастяжимых и невесомых нитях (рис. 3.2). Пусть

массы шаров равны m_1 и m_2 . Если второй шар отвести на угол α от положения

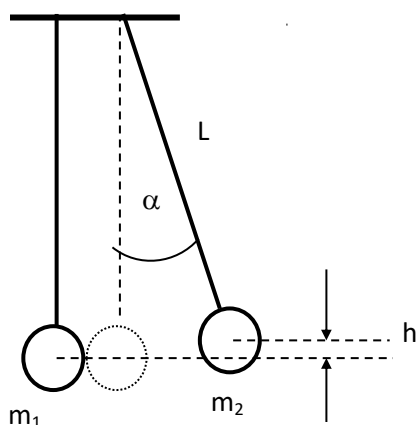


Рисунок 3.2.

равновесия и отпустить, то между шарами произойдет удар. Обозначим скорости шаров до удара $\vec{v}_1 = 0$ и $\vec{v}_2 = \vec{v}_0$, а их скорости после удара как \vec{u}_1 и \vec{u}_2 .

Предположим следующее:

– в процессе удара шары движутся горизонтально, поэтому силы тяжести и упругости не совершают работу над шарами.

Кроме того силы тяжести и упругости

являются консервативными силами, а так как между собой шары взаимодействуют посредством сил упругости, то все силы, действующие на шары консервативны и будет выполняться закон сохранения механической энергии;

- удар является прямым и центральным;
- удар является абсолютно упругим;

Элементарность этой модели состоит в том, что в ней не рассматриваются:

- деформация шаров в процессе удара,
- силы, возникающие между шарами при их контакте,
- потери механической энергии вследствие неидеальной упругости шаров.

Определим скорости шаров после удара, применяя законы сохранения импульса и полной механической энергии. Закон сохранения импульса закон сохранения энергии в данном случае имеют вид:

$$m_2 \vec{v}_0 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2, \quad (3.15)$$

$$\frac{m_2 v_0^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \quad (3.16)$$

Решив систему уравнений (3.15) и (3.16), найдем скорости \vec{u}_1 и \vec{u}_2 :

$$\vec{u}_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_0,$$

$$\vec{u}_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_0.$$

В случае, когда шары имеют одинаковые массы, т.е. $m_1=m_2=m$, получим $\vec{u}_1 = \vec{v}_0$ и $\vec{u}_2 = 0$.

Это означает, что первоначально двигавшийся шар останавливается, а неподвижный – приобретает его начальную скорость.

Скорость \vec{v}_0 второго шара в момент, предшествующий удару, определим из закона сохранения энергии. Шар, отведенный от положения равновесия на угол α , обладает потенциальной энергией $U_{\text{п}}=m_2gh$. В положении равновесия эта энергия переходит в кинетическую энергию $T = \frac{m_2v_0^2}{2}$. Отсюда найдем, что $v_0 = \sqrt{2gh}$.

Из рис. 3.2 имеем $\cos\alpha = \frac{L-h}{L}$, откуда $h = 2L\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Тогда:

$$v_0 = 2\sqrt{gL}\sin\frac{\alpha}{2},$$

где L – расстояние от точки крепления до центра шара.

Рассматриваемая модель не позволяет найти точное значение силы удара (контактной силы), поскольку она не рассматривает деформации шаров в процессе удара. Однако здесь можно найти среднюю силу удара $\langle \vec{F} \rangle$ (формула (3.6)) для первоначально покоящегося шара:

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \langle \vec{F} \rangle \cdot \tau,$$

где $\vec{p}_1 = m\vec{v}_1 = 0$, $\vec{p}_2 = m\vec{u}_1 = m\vec{v}_0$, τ – время соударения шаров, которое можно измерить весьма точно. Тогда формула, выражающая среднюю силу

удара через начальную скорость соударения шаров, будет иметь следующий вид:

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{m\vec{v}_0}{\tau}. \quad (3.17)$$

Подставив в формулу (3.17) выражение для массы шара $m = \rho V = 1/6\rho\pi D^3$ (ρ – плотность шара, D – его диаметр), получим окончательно значение силы:

$$\langle F \rangle = \frac{\rho\pi D^3 v_0}{6\tau}.$$

3.8. Измерение времени соударения шаров при помощи частотомера-хронометра

Время соударения стальных шаров легко измерить при помощи очень простой электрической цепи и электронного частотомера-хронометра. Схема измерительной цепи представлена на рис. 3.3.

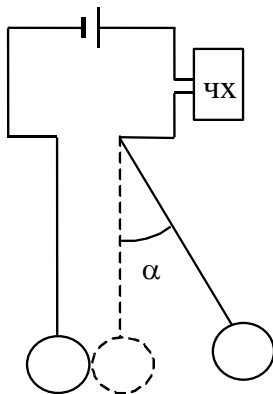


Рисунок 3.3.

В процессе соударения шары замыкают электрическую цепь, состоящую из последовательно включенных источника тока и частотомера-хронометра (ЧХ). До тех пор, пока шары находятся в контакте, в цепи возникает импульс тока. Длительность

шары находятся в контакте, в цепи возникает импульс тока. Длительность

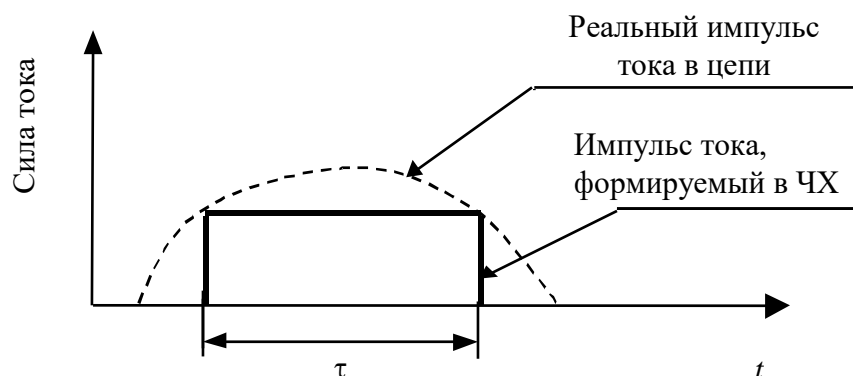


Рисунок 3.4.

импульса тока, который, вообще говоря, имеет сложную форму, измеряют с помощью ЧХ. Для этого в ЧХ импульс тока превращают в импульс прямоугольной формы (рис. 3.4). Длительность этого импульса и принимают за время соударения шаров.

3.9. Порядок выполнения работы

1. Измерьте расстояние от точки подвеса до центра шара L с помощью линейки. С помощью штангенциркуля измерьте диаметр шара D . Измерение обеих величин проведите не менее 3 раз. Данные занесите в таблицу 3.1.

2. Рассчитайте среднее расстояние от точки подвеса до центра шара \bar{L} , случайную погрешность для каждого измерения ΔL и среднюю случайную погрешность $\Delta \bar{L}$ по формулам:

$$\bar{L} = \frac{(L_1 + L_2 + L_3)}{3},$$

$$\Delta \bar{L}_i = |\bar{L} - L_i|, \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\Delta \bar{L} = \frac{(\Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3)}{3},$$

и также занесите их в таблицу 3.1. Те же расчеты проделайте и для величины D .

3. По формулам:

$$\Delta D_{\text{полн}} = \sqrt{(\Delta \bar{D})^2 + (\Delta D_{\text{пр}})^2},$$

$$\Delta L_{\text{полн}} = \sqrt{(\Delta \bar{L})^2 + (\Delta L_{\text{пр}})^2},$$

рассчитайте полные погрешности прямых измерений величин D и L . Приборные погрешности штангенциркуля и линейки $\Delta D_{\text{пр}}$, $\Delta L_{\text{пр}}$ указаны в таблице 3.1.

Таблица 3.1

№ п/п	$L, 10^{-2}$ м	$\Delta L, 10^{-2}$ м	$D, 10^{-3}$ м	$\Delta D, 10^{-3}$ м	$\Delta L_{\text{пр}}, 10^{-3}$ м	$\Delta D_{\text{пр}}, 10^{-3}$ м
1					0.5	0.05
2						
3						
	$\overline{L}_{\text{ср}} =$	$\Delta \overline{L} =$	$\overline{D}_{\text{ср}} =$	$\Delta \overline{D} =$		

4. Подготовьте к работе частотомер-хронометр (ЧХ). Для этого проверьте положение переключателей:

- переключатель «Род работ» должен находиться в положении «т»;
- переключатель «Время отсчета» - в положении «1»;
- переключатель «УПТ» - в положении «1/1»;
- переключатель «Метки времени» - в положении «1»;
- переключатель режима работы – в положении «ручн. внешн.».

5. Включите ЧХ и дайте ему прогреться 3-5 минут (выключатель в правом верхнем углу).

6. Отведите правый шар на угол $\alpha=10^\circ$ и отпустите его. Запишите время столкновения в таблицу 3.2. Обратите внимание, что время столкновения τ измеряется в микросекундах ($1\text{мкс} = 1 \cdot 10^{-6}$ с). Опыт повторите не менее 3 раз. Перед каждым опытом очищайте табло ЧХ нажатием кнопки «сброс», которая находится под переключателем «ручн. внешн.».

7. Выполните аналогичные измерения для углов $\alpha = 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ$. Окончательно заполните таблицу 3.2.

Таблица 3.2

№ п/п	$\alpha_1=10^\circ$		$\alpha_2=20^\circ$	$\alpha_3=30^\circ$	$\alpha_4=40^\circ$
	$\tau_1, 10^{-6} \text{ с}$	$\Delta\tau_1, 10^{-6} \text{ с}$	$\tau_2, 10^{-6} \text{ с}$	$\tau_3, 10^{-6} \text{ с}$	$\tau_4, 10^{-6} \text{ с}$
1					
2					
3					
	$\bar{\tau}_1=$	$\Delta\bar{\tau}_1=$	$\bar{\tau}_2=$	$\bar{\tau}_3=$	$\bar{\tau}_4=$

8. Рассчитайте средние значения времен соударения шаров $\bar{\tau}_1$, $\bar{\tau}_2$, $\bar{\tau}_3$, $\bar{\tau}_4$. Случайные погрешности необходимо рассчитать только для случая $\alpha_1=10^\circ$.

9. По формулам:

$$v_i = 2\sqrt{gL\sin\frac{\alpha_i}{2}}, \quad (i = 1,2,3,4),$$

$$F_i = \frac{\rho\pi\bar{D}^3 v_i}{6\bar{\tau}_i}, \quad (i = 1,2,3,4).$$

где $\rho=7.7\cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ – плотность стали, $g=9.8 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения, $\pi=3.14$, вычислите для каждого угла отклонения значение скорости шара в момент удара v_i и значение средней силы удара F_i . Эти значения, округленные до трех значащих цифр, занесите в таблицу 3.3.

Таблица 3.3

№ п/п	α_i , град	$\bar{\tau}_i, 10^{-6} \text{ с}$	v_i , м/с	F_i , Н
1	10			
2	20			
3	30			

4	40			
---	----	--	--	--

10. Постройте на миллиметровке график зависимости $F=f(v)$.

11. Определите относительные ε_v , ε_F и абсолютные Δv_i , ΔF_i погрешности определения v_1 и F_1 для $\alpha_1 = 10^\circ$:

$$\varepsilon_v = \frac{1}{2} \left(\Delta\alpha \cdot \operatorname{ctg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) + \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta L_{\text{полн}}}{\bar{L}} \right), \quad \Delta v_1 = v_1 \varepsilon_v,$$

$$\varepsilon_F = \varepsilon_v + \frac{\Delta\pi}{\pi} + \frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{3\Delta D_{\text{полн}}}{\bar{D}} + \frac{\Delta\bar{\tau}_1}{\bar{\tau}_1}, \quad \Delta F_1 = F_1 \varepsilon_F,$$

где абсолютные погрешности приближенных величин $\Delta\rho=0.05 \cdot 10^3$ кг/м³, $\Delta g=0.05$ м/с², $\Delta\alpha=0.044$ рад, $\Delta\pi=0.005$.

12. Запишите окончательные результаты.

4. ИЗМЕРЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ МЕТОДОМ НАКЛОННОГО МАЯТНИКА

Цель работы.

1. Изучить основные закономерности трения качения.
2. Определить коэффициент трения качения шара по подложке методом наклонного маятника.

Список литературы.

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики, т.1, гл.2, § 17. М.: Наука, 1989.
2. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики, М.: Высшая школа, 1989.
3. Трофимова Т.И. Курс физики, М.: Высшая школа, 1998.
4. Савельев И.В. Курс общей физики, т.1, гл.2, §15. М.: Наука, 1977.

Порядок теоретической подготовки к выполнению работы.

Изучить и законспектировать в тетрадь ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы.

1. Сила трения. Трение покоя и трение скольжения.
2. Что такое трение качения? Какому закону оно подчиняется?
3. Какой физический смысл имеет коэффициент трения качения?
4. Какой закон используется как исходный для вывода расчетной формулы? В чем конкретно выражается этот закон по отношению к колебаниям маятника на наклонной плоскости?
5. Почему убыль полной энергии маятника можно считать равной убыли потенциальной энергии маятника в конечном и начальном крайних положениях? Как рассчитывается эта убыль энергии?
6. Как рассчитывается работа сил сопротивления качению?

4.1. Введение

В современной физике различают четыре вида взаимодействий: 1) *гравитационное* (взаимодействие, обусловленное всемирным тяготением); 2) *электромагнитное* (осуществляемое через электрические и магнитные поля); 3) *сильное* или *ядерное* (обеспечивающее связь нуклонов в атомном ядре); 4) *слабое* (ответственное за процессы распада элементарных частиц).

В рамках классической механики имеют дело с гравитационными и электромагнитными взаимодействиями. Одним из проявлений электромагнитных взаимодействий являются силы трения.

Силы трения проявляются как при относительном перемещении соприкасающихся тел или их частей, так и при их относительном покое. Трение, возникающее при относительном перемещении двух соприкасающихся тел, называется *внешним*; трение между частями одного и того же тела (например жидкости или газа) носит название *внутреннего*.

Трение между поверхностями двух твердых тел при отсутствии какой-либо прослойки (смазки) между ними называется *сухим*. Трение между твердым телом и жидкой или газообразной средой, а также между слоями такой среды называется *вязким*.

Применительно к сухому трению различают *трение покоя*, *трение скольжения* и *трение качения*.

Сила трения покоя возникает при попытке вывести тело из состояния покоя. Величина силы трения покоя “автоматически” принимает значения, равные внешней силе f (см. Рисунок 4.1), и изменяется в пределах от 0 до f_0 , где f_0 – это сила, при которой тело приходит в движение. Сила трения

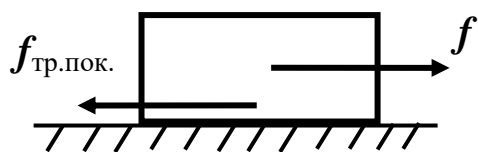


Рисунок 4.1. Действие силы трения покоя.

скольжения в момент начала скольжения равна f_0 . При увеличении модуля скорости сила трения скольжения вначале убывает, проходит через минимум, а затем начинает возрастать. Эта зависимость силы трения

от скорости, как правило, выражена очень слабо, поэтому будем считать, что сила трения скольжения от скорости не зависит. Как экспериментально установил Ш. Кулон, сила трения не зависит от площади соприкасающихся поверхностей и пропорциональна силе нормального давления f_n , с которой одно тело действует на другое:

$$f_{\text{тр}} = \mu f_n.$$

Постоянная μ называется *коэффициентом трения скольжения* и зависит от природы и состояния трущихся поверхностей. Если тело скользит по поверхности другого тела, то μ называют коэффициентом трения скольжения. Если же тела покоятся друг относительно друга, то его называют коэффициентом трения покоя.

Сила трения качения возникает между шарообразным или цилиндрическим телом, катящимся по плоской или изогнутой поверхности. Трение качения формально подчиняется тем же законам, что и трение скольжения, но коэффициент трения при качении значительно меньше, чем при скольжении.

4.2. Трение качения

Если тело А катится по телу В, т.е. движется так, что точки соприкосновения их поверхностей не обладают относительной скоростью, то трение, возникающее в этом случае, называется *трением качения*. Возникновение трения при таких условиях объясняется тем, что тело А и опора В (рис. 4.2) под действием силы нормального давления N взаимно деформируются, поэтому телу А приходится как бы подниматься на возвышение С, преодолевая одновременно межмолекулярное взаимодействие в зоне взаимного соприкосновения обоих тел.

В условиях данной работы межмолекулярное взаимодействие можно считать слабым фактором. Это допускает рассмотрение силы трения для самого простого случая качения. Пусть тело А равномерно

катится по телу В под действием постоянной движущей силы F. Тогда в точке С, вокруг которой происходит в данный момент вращение тела А, возникает приложенная к данному телу реакция опоры Q'. Она равна по величине и противоположна по направлению равнодействующей Q и лежит с ней на одной прямой (Рисунок 4.2).

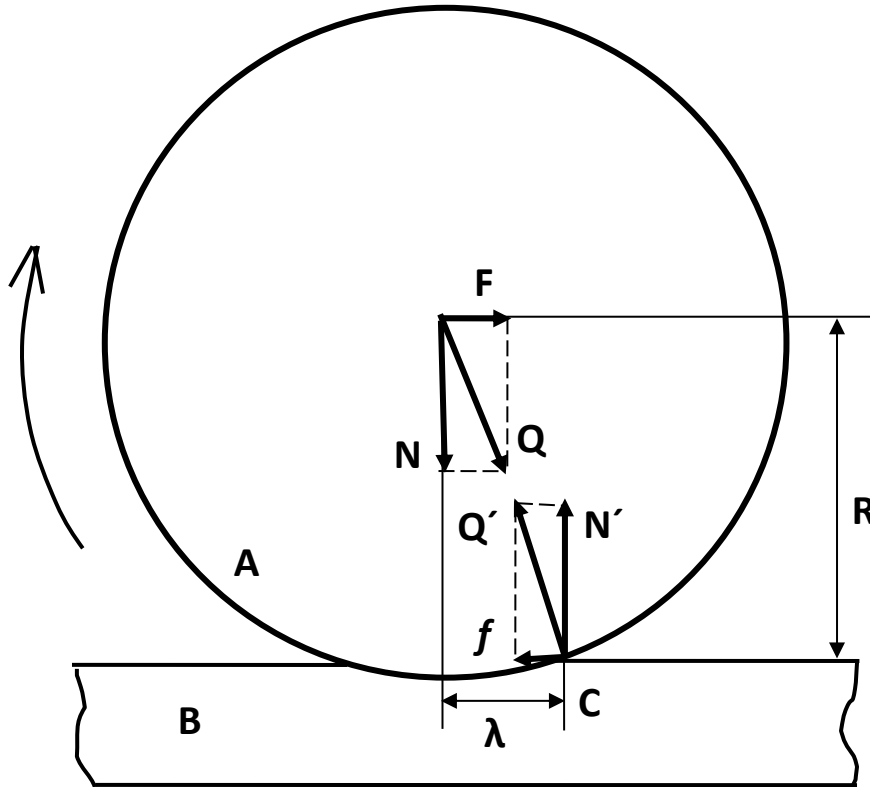


Рисунок 4.2. Возникновение силы трения качения.

Если разложить Q' на составляющие N' и f, параллельные соответственно N и F, то будут иметь место следующие равенства:

$$N' = N, \quad f = F. \quad (4.1)$$

Сила f , приложенная к движущемуся телу и направленная против движения, является силой трения качения.

При равномерном качении тела А алгебраическая сумма моментов всех сил (F, N, N', f) относительно точки вращения С по условию равновесия должна равняться нулю, т.е. $M_F + M_N + M_{N'} + M_f = 0$. Поскольку $M_{N'} = M_f = 0$, а

$M_F \approx FR$ (деформация предполагается малой) и $M_N = -N\lambda$, то это условие равновесия сводится к выражению:

$$FR = N\lambda, \quad (4.2)$$

где R – плечо движущей силы F , λ – плечо силы нормального давления N . Из (4.1) и (4.2) следует окончательное выражение для силы трения качения:

$$f = \lambda \frac{N}{R}. \quad (4.3)$$

При качении тела всегда $\lambda \ll R$, что эквивалентно условию $f \ll N$. Это значит, что сила трения качения отличается весьма малым значением в сравнении с силой нормального давления. Заметим, что при скольжении подобное соотношение между силой трения и силой нормального давления не соблюдается.

Величина λ в уравнении (4.3) называется *коэффициентом трения качения*. Являясь плечом силы нормального давления, этот коэффициент имеет размерность длины и выражается обычно десятymi и сотыми долями миллиметра в зависимости от свойств поверхности качения. Для данной пары тел при данном состоянии их поверхностей коэффициент трения качения имеет вполне определенное значение, не зависящее в широких пределах о величины скорости качения.

4.3.Метод наклонного маятника

Среди различных способов определения коэффициента трения качения одним из наиболее совершенных методов является метод наклонного маятника, разработанный А.С. Ахматовым. Метод наклонного маятника состоит в том, что коэффициент трения определяется из условий колебаний математического маятника на наклонной плоскости, где возникает трение качения между колеблющимся телом и наклонной плоскостью. Наклонный маятник схематически изображен на рис. 4.3., где А – колеблющееся тело, которое в процессе колебания катится по наклонной плоскости В,

составляющей угол β с горизонтальной плоскостью С. Так как на колеблющееся тело непрерывно действует сила трения, то колебания будут затухающими, т.е. амплитуда колебаний будет уменьшаться. Закономерность убывания амплитуды определяется характером силы, вызывающей затухание. Если затухание вызывает сила, которая не зависит от скорости движения колеблющегося тела, то амплитуда будет убывать по закону арифметической прогрессии. В нашем случае силой, вызывающей затухание, является сила трения качения, которая в широких пределах не зависит от скорости.

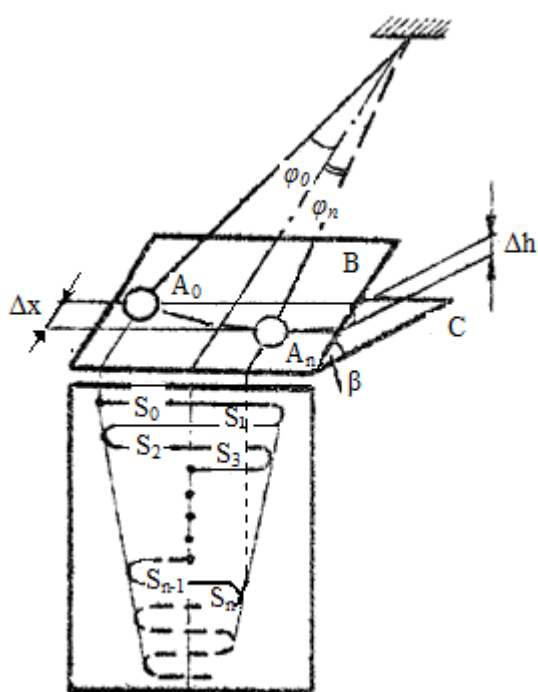


Рисунок 4.3. К выводу формулы коэффициента трения качения методом наклонного маятника.

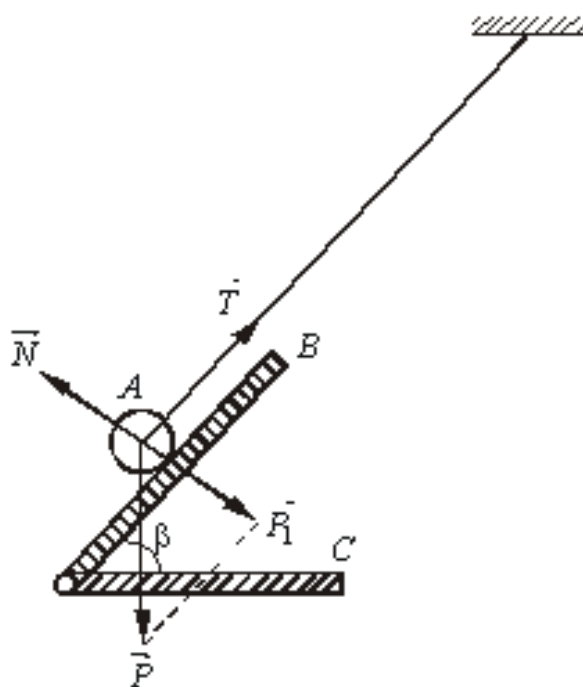


Рисунок 4.4. Наклонный маятник, вид сбоку.

Следовательно, в условиях наклонного маятника амплитуда будет убывать по арифметической прогрессии, т.е. линейно. Расчетную форму для определения коэффициента трения качения можно вывести на основании закона сохранения энергии. Пусть ΔE – уменьшение энергии маятника после

некоторого числа колебаний, обусловленное их затуханием. Тогда ΔE должно быть равным работе сил сопротивления качению, т.е.:

$$\Delta E = \Delta A. \quad (4.4)$$

Найдем сначала ΔE . Энергия колеблющегося тела равна потенциальной энергии этого тела в крайнем положении. Вследствие затухания высота крайнего положения тела на наклонном маятнике по отношению к произвольно выбранному горизонтальному уровню будет уменьшаться с каждым колебанием. Таким образом, убыль энергии, возникающую вследствие затухания, можно выразить через убыль потенциальной энергии в крайних положениях.

Обозначим через Π_0 потенциальную энергию маятника в начальном крайнем положении, а через Π_n – его потенциальную энергию в конечном крайнем положении. Так как полная энергия маятника равна его потенциальной энергии в крайнем положении, то убыль энергии будет равна:

$$\Delta E = \Pi_0 - \Pi_n = P\Delta h, \quad (4.5)$$

где Δh – разность высот центра тяжести колеблющегося тела в начальном и конечном крайних положениях по отношению к произвольно выбранному горизонтальному уровню, $P=mg$ – вес тела. Как следует из рис.4.3:

$$\Delta h = \Delta x \sin\beta = l(\cos\varphi_n - \cos\varphi_0)\sin\beta, \quad (4.6)$$

где l – длина маятника.

Подставив выражение Δh из равенства (4.6) в (4.5), получаем окончательную формулу изменения энергии:

$$\Delta E = Pl\sin\beta(\cos\varphi_n - \cos\varphi_0) = mgl\sin\beta(\cos\varphi_n - \cos\varphi_0). \quad (4.7)$$

Найдем работу силы трения качения. Эта работа равна произведению силы трения f на путь S , представляющий собой сумму всех амплитуд, пройденных телом после n простых колебаний (два

простых колебания составляют одно полное колебание):

$$\Delta A = f \cdot S, \quad (4.8)$$

где S , как следует из рис.4.3, равно:

$$\begin{aligned} S &= S_0 + 2S_1 + 2S_2 + \dots + 2S_{n-1} + S_n = \\ &= S_0 + S_n + 2(S_1 + S_2 + \dots + S_{n-1}). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Так как амплитуды $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n$ убывают по закону арифметической прогрессии, то можно записать:

$$S_1 + S_2 + \dots + S_{n-1} = \frac{n-1}{2} (S_1 + S_{n-1}). \quad (4.10)$$

После каждого простого колебания амплитуда убывает на одну и ту же величину ΔS , поэтому S_1 и S_{n-1} можно выразить через S_0 и S_n на основании следующих уравнений:

$$\begin{aligned} S_1 &= S_0 - \Delta S, \\ S_{n-1} &= S_n + \Delta S, \end{aligned}$$

откуда следует, что:

$$S_1 + S_{n-1} = S_0 - \Delta S + S_n + \Delta S = S_0 + S_n. \quad (4.11)$$

Принимая во внимание выражения (4.10) и (4.11), выражение (4.9) можно записать иначе:

$$S = S_0 + S_n + 2 \frac{n-1}{2} (S_0 + S_n) = n(S_0 + S_n). \quad (4.12)$$

Амплитуды S_0 и S_n представляет собой дуги окружности радиуса l , поэтому:

$$\begin{cases} S_0 = l\varphi_0 \\ S_n = l\varphi_n \end{cases}, \quad (4.13)$$

где l – длина маятника, φ_0 и φ_n – углы его отклонения, выраженные в радианах. Таким образом, путь, пройденный маятником за n простых колебаний, как следует из выражений (4.12) и (4.13), равен:

$$S = nl(\varphi_0 + \varphi_n). \quad (4.14)$$

Выразим теперь силу трения f , входящую в формулу (4.8). Как следует из формулы (4.3), она равна:

$$f = \lambda \frac{N}{R} = 2\lambda \frac{N}{D}. \quad (4.15)$$

где D – диаметр шарика, колеблющегося на наклонной плоскости, N – сила нормального давления, которая в данном случае является составляющей силы тяжести mg , направленной нормально к плоскости. Эта составляющая, как видно из рис. 4.4, где показан наклонный маятник (А – колеблющееся тело, В и С, соответственно, наклонная и горизонтальная плоскости), равна: $P_1 = mg \cos \beta$.

Поэтому уравнение (4.15) принимает следующий вид:

$$f = 2\lambda \frac{mg \cos \beta}{D}. \quad (4.16)$$

Подставляя выражение f из уравнения (4.16) и S из уравнения (4.14) в формулу (4.8), получаем работу сил сопротивления качению, совершенную за n простых колебаний:

$$\Delta A = 2\lambda \frac{mg \cos \beta}{D} nl(\varphi_0 + \varphi_n). \quad (4.17)$$

Так как работа силы трения ΔA равна убыли энергии маятника ΔE , то, подставив значения этих величин соответственно из уравнений (4.17) и (4.7) в уравнение (4.4), имеем:

$$mglsin\beta(\cos\varphi_n - \cos\varphi_0) = 2\lambda \frac{mg\cos\beta}{D}nl(\varphi_0 + \varphi_n),$$

откуда после несложного преобразования получаем следующее выражение для коэффициента трения качения:

$$\lambda = \frac{\cos\varphi_n - \cos\varphi_0}{2n(\varphi_0 + \varphi_n)} D \cdot tg\beta. \quad (4.18)$$

Принимая во внимание, что углы φ_0 и φ_n , стоящие в знаменателе этой формулы, должны быть выражены в радианах, а наклонный маятник снабжен для измерения этих углов градусной шкалой, мы можем ввести в формулу (4.18) соответствующий переводной коэффициент, при наличии которого не будет надобности результаты измерения углов в градусной мере переводить в радианную меру. Учитывая, что $1^\circ = 1/57,3$ рад, получаем окончательную формулу с переводным коэффициентом:

$$\lambda = 57.3 \cdot tg\beta \frac{\cos\varphi_n - \cos\varphi_0}{N(\varphi_0 + \varphi_n)} D. \quad (4.19)$$

где D – диаметр шара, колеблющегося на наклонной плоскости, β – угол наклона плоскости в градусах, φ_0 и φ_n – углы отклонения маятника при его начальном и конечном крайнем положении в градусах, $N=2n$ – число полных колебаний (счет ведется по крайним положениям маятника), λ – коэффициент трения качения.

4.4. Оформление отчета

Отчет должен содержать:

Цель работы.

Перечень приборов и принадлежностей к работе.

Схему лабораторной установки.

Физическую модель.

Математическую модель.

Таблицу результатов измерений.

Результаты расчётов и погрешности.

Выводы.

4.5.Порядок выполнения работы

1. Установить в наклонный маятник стальную подложку.
2. Отклонить плоскость маятника на угол $\beta=45^\circ$ от вертикального положения. (Ручка поворота плоскости – сзади маятника, шкала углов $90-\beta$ – сбоку.)
3. Измерить штангенциркулем не менее трех раз диаметр стального шарика D . Данные занести в таблицу 4.1.
4. Расположить нить маятника против нулевого штриха наклонной шкалы.
5. Отклонить маятник от положения равновесия на угол $\varphi_0=11^\circ$. Затем без толчка отпустить маятник и с этого момента начать отсчет полных колебаний. После того, как маятник совершит $N=15$ полных колебаний, измерить угол отклонения конечного колебания маятника φ_{n1} (измерение φ_{n1} производится на ходу). Измерения провести три раза. Результаты измерений занести в таблицу 4.1.
6. Заменить стальную подложку латунной или алюминиевой (по выбору преподавателя). Повторить измерения по п.5. Значения φ_{n2} занести в таблицу 4.1.
7. Рассчитать средние значения \bar{D} , $\Delta\bar{D}$, $\overline{\varphi_{n1}}$, $\overline{\varphi_{n2}}$ и занести их в таблицу 4.1.

Таблица 4.1

№ п/п	β ,град	D,мм	ΔD ,мм	φ_0 , град	φ_{n1} , град	φ_{n2} , град	N
1	45			11			15
2	45			11			15
3	45			11			15
среднее	45	$\bar{D} =$	$\Delta \bar{D} =$	11	$\overline{\varphi_{n1}} =$	$\overline{\varphi_{n2}} =$	15

8. Рассчитать среднее значение коэффициента трения качения $\bar{\lambda}_1$ сталь по стали:

$$\bar{\lambda}_1 = 57.3 \cdot \operatorname{tg} \beta \frac{\cos \overline{\varphi_{n1}} - \cos \varphi_0}{N(\varphi_0 + \overline{\varphi_{n1}})} \bar{D},$$

и среднее значение коэффициента трения качения $\bar{\lambda}_2$ сталь по латуни/по алюминию:

$$\bar{\lambda}_2 = 57.3 \cdot \operatorname{tg} \beta \frac{\cos \overline{\varphi_{n2}} - \cos \varphi_0}{N(\varphi_0 + \overline{\varphi_{n2}})} \bar{D}.$$

9. Определить относительную и абсолютную погрешности определения λ для обоих случаев (φ_0 , $\overline{\varphi_{n1}}$ и $\overline{\varphi_{n2}}$ везде берутся в градусах):

$$\varepsilon_1 = 17.4 \cdot 10^{-3} + \frac{\sin \overline{\varphi_{n1}} + \sin \varphi_0}{\cos \overline{\varphi_{n1}} - \cos \varphi_0} \cdot 4.4 \cdot 10^{-3} + \frac{0.5 \text{ град}}{\varphi_0 + \overline{\varphi_{n1}}} + \frac{\Delta \bar{D}}{\bar{D}},$$

$$\Delta \lambda_1 = \varepsilon_1 \cdot \bar{\lambda}_1,$$

$$\varepsilon_2 = 17.4 \cdot 10^{-3} + \frac{\sin \overline{\varphi_{n2}} + \sin \varphi_0}{\cos \overline{\varphi_{n2}} - \cos \varphi_0} \cdot 4.4 \cdot 10^{-3} + \frac{0,5 \text{ град}}{\varphi_0 + \overline{\varphi_{n2}}} + \frac{\Delta \bar{D}}{\bar{D}},$$

$$\Delta \lambda_2 = \varepsilon_2 \cdot \bar{\lambda}_2,$$

(здесь $17.4 \cdot 10^{-3}$ – это численное значение слагаемого $\frac{2\Delta\beta}{\sin 2\beta}$; $4.4 \cdot 10^{-3}$ – численное значение приборных погрешностей $\Delta\varphi_n$ и $\Delta\varphi_0$)

10. Записать окончательный результат в виде:

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}_1 \pm \Delta\lambda_1, \text{ при } \varepsilon_1 = \dots\%$$

$$\lambda_2 = \bar{\lambda}_2 \pm \Delta\lambda_2, \text{ при } \varepsilon_2 = \dots\%$$

11. Сделать выводы.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ КРЕСТООБРАЗНОГО МАЯТНИКА

Цель работы.

1. Проверить выполнимость основного закона динамики вращательного движения твердого тела.
2. Определить момент инерции крестообразного маятника.
3. Исследовать зависимость момента инерции крестообразного маятника от распределения массы относительно оси вращения.

Список литературы.

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики, т.1, гл.2, § 17. М.: Наука, 1989.
2. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики, М.: Высшая школа, 1989.
3. Трофимова Т.И. Курс физики, М.: Высшая школа, 1998.
4. Савельев И.В. Курс общей физики, т.1, гл.2, §15. М.: Наука, 1977.

Порядок теоретической подготовки к выполнению работы.

Изучить и законспектировать в тетрадь ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы.

1. Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела.
2. Момент силы относительно произвольной оси?(в векторной форме).
3. Что называют моментом инерции материальной точки ?
4. Что называют моментом инерции тела и от чего он зависит?
5. Вывод рабочей формулы для расчета момента инерции крестообразного маятника.
6. Теорема Штейнера.

7. Зависимость момента инерции тела от распределения массы тела.

Приборы и принадлежности.

1. Крестообразный маятник (маятник Абербека).
2. Секундомер.
3. Набор грузов.

Указания по технике безопасности.

Приборы питаются от сети переменного напряжения 220 В.

**НЕ РАЗРЕШАЕТСЯ РАБОТАТЬ ПРИ ПОВРЕЖДЕННОЙ ИЗОЛЯЦИИ
СОЕДИНИТЕЛЬНЫХ ПРОВОДОВ.**

Отчёт по лабораторной работе должен содержать.

1. цель работы
2. приборы и принадлежности к работе
3. схему лабораторной установки
4. физическую модель
5. математическая модель
6. таблица результатов измерений
7. результаты расчётов и погрешности
8. вывод

5.1. Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси

Абсолютно твёрдым телом или просто твёрдым телом в механике называют тело деформациями которого в рассматриваемом процессе можно пренебречь. Реальные тела можно приближенно рассматривать как абсолютно твёрдые тела, если деформации, возникающие под действием внешних сил, малы и при решении поставленной задачи о движении твёрдого тела не учитываются.

Всякое движение твердого тела можно разложить на два основных вида движения – поступательное и вращательное.

Поступательное движение – это такое движение, при котором любая прямая, связанная с движущимся телом, остается параллельной самой себе.

Вращательное движение – это такое движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой *осью вращения*. Ось вращения может находиться и вне тела.

5.2. Угловая скорость и угловое ускорение вращающегося твердого тела

Рассмотрим твердое тело, которое вращается вокруг неподвижной оси. Тогда все материальные точки этого тела будут описывать окружности разных радиусов, центры которых лежат на оси вращения. Пусть некоторая точка движется по окружности радиуса R (рис.5.1). Ее положение через промежуток времени Δt зададим углом $\Delta\varphi$. Элементарные (бесконечно малые) повороты можно рассматривать как векторы ($\Delta\vec{\varphi}$ или $d\vec{\varphi}$). Модуль вектора $d\vec{\varphi}$ равен углу поворота, а его направление определяется по правилу правой руки (правого винта): если четыре согнутых пальца направить по направлению движения вращающейся точки, то большой палец укажет направление вектора $d\vec{\varphi}$. Векторы, направления которых связываются с направлением вращения, называются *псевдовекторами*. Эти векторы не имеют определенных точек приложения: они могут откладываться из любой точки на оси вращения.

Угловой скоростью называется векторная физическая величина, равная первой производной угла поворота по времени:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \quad (5.1)$$

Вектор $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси вращения по правилу правой руки, как и вектор $d\vec{\varphi}$. Угловая скорость ω в СИ измеряется в радианах в секунду (рад/с).

Вращение с постоянной угловой скоростью называется *равномерным вращением*. Если вращение

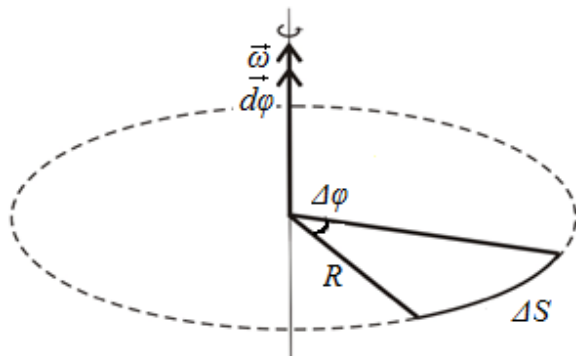


Рисунок 5.1.

является равномерным, то $\omega = \varphi/t$, где φ – конечный угол поворота за время t . Равномерное вращение можно характеризовать *периодом обращения* T – временем, в течение которого тело делает один оборот, т. е. поворачивается на угол 2π . Тогда $\omega = 2\pi/T$ откуда $T = 2\pi/\omega$.

Число оборотов в единицу времени или *частота вращения* n равна:

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow \omega = 2\pi n,$$

– *связь угловой скорости с частотой вращения*. В СИ величина T измеряется в секундах (с), а n – в оборотах в секунду (с^{-1}).

Угловым ускорением называется векторная физическая величина, равная первой производной угловой скорости по времени:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

При вращении тела вокруг неподвижной оси вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения в сторону вектора $d\vec{\omega} = \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1$:

при ускоренном движении вектор $\vec{\varepsilon}$ сонаправлен вектору $\vec{\omega}$, при замедленном – направлен в сторону, противоположную $\vec{\omega}$ (рис. 5.2).

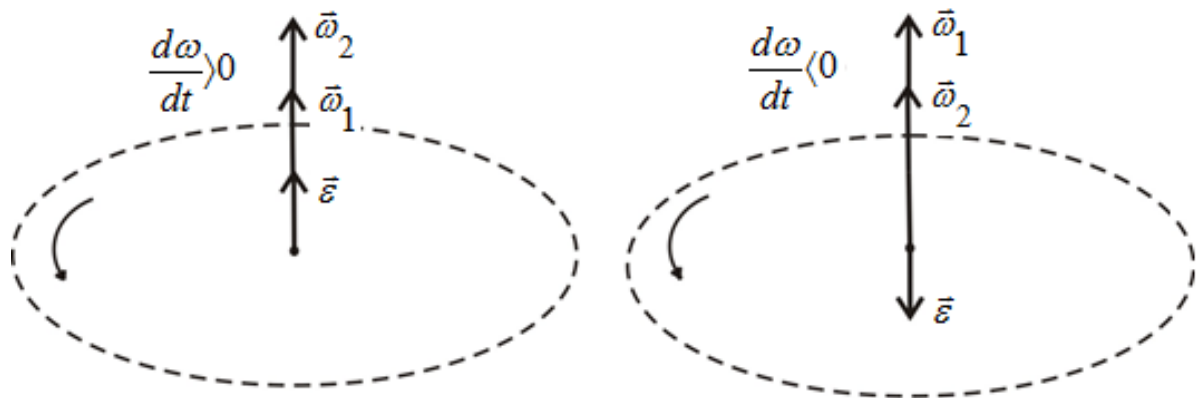


Рисунок 5.2. Два случая а) и б) направления углового ускорения.

Угловое ускорение ε измеряется в радианах на секунду в квадрате ($\text{рад}/\text{с}^2$).

Отдельные точки вращающегося тела имеют различные линейные скорости \vec{v} . Скорость каждой из точек непрерывно изменяет свое направление. Величина скорости v определяется скоростью вращения тела ω и расстоянием R рассматриваемой точки от оси вращения:

$$\vec{v} = [\vec{\omega}\vec{R}].$$

где \vec{R} – радиус-вектор точки.

Ускорение отдельной точки вращающегося тела представим в виде суммы $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$.

Величина нормального ускорения a_n равна:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 R,$$

величина тангенциального ускорения a_τ равна:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt}R = \varepsilon R,$$

а величина полного ускорения a равна:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

5.3. Момент силы и момент импульса материальной точки относительно оси вращения

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси. Траектории движения материальных точек представляют собой окружности, которые лежат в плоскостях, перпендикулярных оси вращения. На рис. 5.3 показана траектория движения одной из материальных точек массы m . Начало координат O поместим на оси вращения Z и положение материальной точки будем описывать радиусом-вектором \vec{r} . Пусть на материальную точку действует сила \vec{F} . Моментом силы \vec{M} относительно начала координат O (рис. 5.3) называется векторная физическая величина равная:

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}].$$

Модуль вектора \vec{M} равен:

$$M = rF\sin\alpha,$$

где $\alpha = (\widehat{\vec{r}, \vec{F}})$ – угол между векторами \vec{r} и \vec{F} . Если опустить перпендикуляр из точки O на направление действия силы, то его длина d_F будет плечом силы \vec{F} , $d_F = r\sin\alpha$ и модуль момента сил будет равен произведению силы на плечо, т.е. $M = Fd_F$.

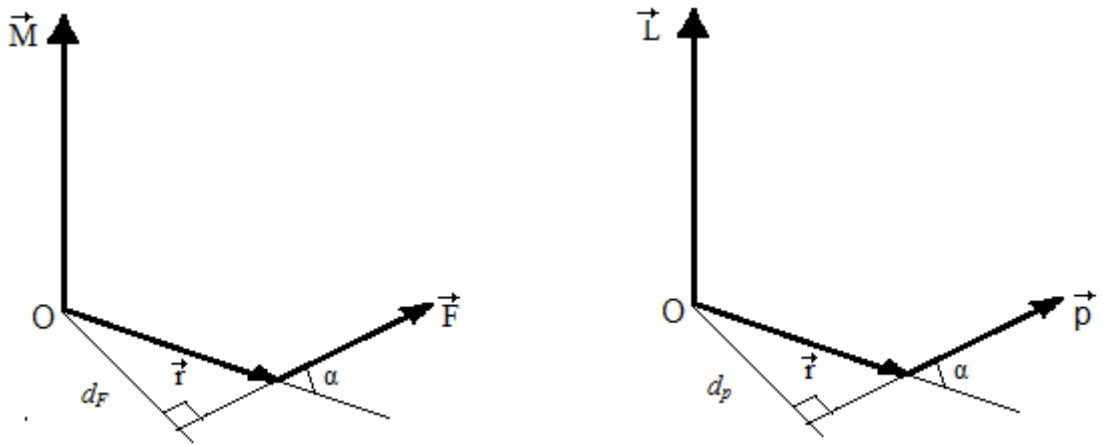


Рисунок 5.3 Момент силы и момент импульса точки относительно начала координат.

Моментом силы относительно неподвижной оси z называется скалярная величина M_z , равная проекции на эту ось вектора \vec{M} момента силы, определенного относительно точки O данной оси z . Значение момента силы M_z не зависит от положения точки O на оси z .

Аналогично вводится *момент импульса* \vec{L} материальной точки относительно начала координат O (рис. 5.3):

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}].$$

Модуль вектора \vec{L} равен:

$$L = rpsin\alpha,$$

где $\alpha = (\vec{r}, \vec{p})$ – угол между векторами \vec{r} и \vec{p} ; $d_p = rsin\alpha$ – плечо импульса \vec{p} , т.е. длина перпендикуляра, опущенного из точки O на направление вектора \vec{p} .

Моментом импульса относительно неподвижной оси z называется скалярная величина L_z , равная проекции на эту ось вектора \vec{L} момента импульса, определенного относительно точки O данной оси z . Значение момента импульса L_z не зависит от положения точки O на оси z .

Оба вектора \vec{M} и \vec{L} согласно определению направлены перпендикулярно радиусу-вектору \vec{r} материальной точки, однако в общем случае направления векторов \vec{M} и \vec{L} не совпадают, но существует закон, который связывает момент импульса \vec{L} с моментом силы \vec{M} .

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (5.2)$$

Это соотношение называется **уравнением моментов для материальной точки**.

Если спроектировать уравнение (5.2) на ось Z, то получим *уравнение моментов для материальной точки относительно оси вращения Z*:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z. \quad (5.3)$$

5.4. Момент инерции твердого тела

Рассмотрим твердое тело как систему жестко связанных материальных точек m_i . Величина I_i , равная произведению массы материальной точки на квадрат ее расстояния до оси вращения, называется *моментом инерции материальной точки относительно этой оси*.

$$I_i = m_i R_i^2.$$

Момент инерции твердого тела относительно оси вращения равен сумме моментов инерции элементарных масс твердого тела относительно этой оси.

$$I = \sum_{i=0}^n m_i R_i^2. \quad (5.4)$$

Момент инерции твердого тела характеризует инертные свойства тела при его вращении. В СИ момент инерции измеряется в $\text{кг}\cdot\text{м}^2$.

5.5. Вычисление моментов инерции некоторых тел правильной формы

По определению момент инерции твёрдого тела равен:

$$I = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n \Delta m_i r_i^2 = \int_V r^2 dm,$$

где символом Δm_i обозначена элементарная масса m_i , r_i – ее расстояние от оси вращения.

Элементарная масса Δm_i равна произведению плотности тела ρ_i в данной точке на соответствующий элементарный объём ΔV_i :

$$\Delta m_i = \rho_i \Delta V_i.$$

Следовательно, момент инерции тела можно представить в виде:

$$I = \int_V r^2 \rho dV = \rho \int_V r^2 dV.$$

Пример 1. Вычисление момента инерции тонкого стержня массой m и длиной l , вращающегося вокруг оси, перпендикулярной стержню и проходящей через центр масс (рис. 5.4).

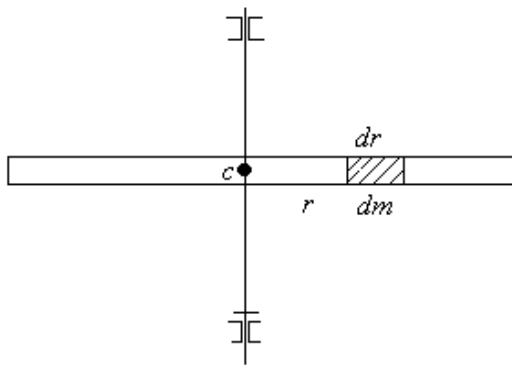


Рисунок 5.4.

Будем считать стержень однородным, тогда:

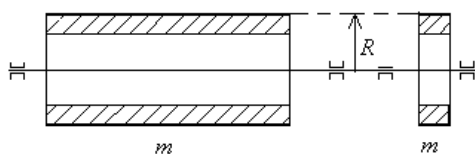
$$dm = \frac{m}{l} dr,$$

$$I_0 = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} r^2 \frac{m}{l} dr = \frac{2m}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} r^2 dr = \frac{ml^2}{12},$$

$$I_0 = \frac{1}{12} ml^2.$$

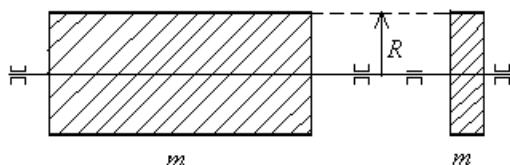
Другие примеры выражений моментов инерции для некоторых тел правильной формы приведём без вычислений.

Пример 2. *Полый тонкостенный цилиндр, тонкое кольцо.*



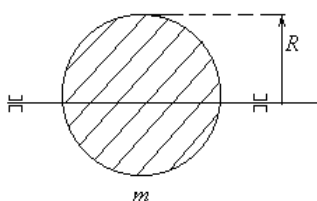
$$I_0 = mR^2.$$

Пример 3. *Сплошной цилиндр, диск.*



$$I_0 = \frac{1}{2}mR^2.$$

Пример 4. *Сплошной шар.*



$$I_0 = \frac{2}{5}mR^2.$$

Заметим, что во всех приведённых примерах тела считаются однородными и моменты инерции вычисляются относительно *центральных осей*, т. е. осей проходящих через центр масс, которые показаны на рисунках.

5.6. Кинетическая энергия вращения твердого тела

Если рассматривать твердое тело как систему жестко связанных материальных точек m_i , то кинетическая энергия вращающегося твердого тела будет равна сумме кинетических энергий материальных точек, составляющих твердое тело. Кинетическая энергия i -й материальной точки равна:

$$W_i = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{m_i R_i^2 \omega^2}{2}.$$

Кинетическая энергия вращающегося твёрдого тела складывается из кинетических энергий элементарных масс этого тела:

$$W = \sum_{i=0}^n W_i = \frac{1}{2} \omega^2 \left(\sum_{i=0}^n m_i R_i^2 \right),$$

но сумма, входящую в правую часть этого соотношения представляет собой момент инерции I твёрдого тела относительно оси вращения.

В результате получаем формулу для кинетической энергии вращающегося твёрдого тела:

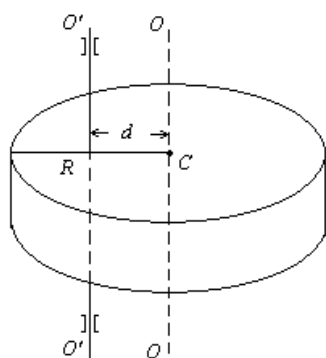
$$W = \frac{I\omega^2}{2}. \quad (5.5)$$

5.7. Момент инерции тела относительно нецентральной оси. Теорема Штейнера

Теорема Штейнера позволяет рассчитать момент инерции тела относительно любой произвольной оси, если известен момент инерции тела, проходящий через центр масс (OO , см. рис. 5.5) относительно центральной оси, параллельной данной произвольной оси.

Теорема Штейнера: Момент инерции тела I относительно произвольной оси $O'O'$ равен сумме момента инерции тела I_0 относительно оси OO , параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и

произведения массы тела m на квадрат расстояния d между осями:



$$I = I_0 + md^2. \quad (5.6)$$

Рисунок 5.5. Теорема Штейнера

Таким образом, теорема Штейнера по существу сводит вычисление момента инерции относительно произвольной оси к вычислению момента инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела.

5.8. Основной закон динамики вращения твердого тела

Применим теперь уравнение моментов относительно оси вращения (5.3) к рассмотрению вращательного движения твердого тела. Опять будем рассматривать твёрдое тело как систему жёстко связанных материальных точек с массой m_i . Запишем уравнение моментов (5.3) для каждой материальной точки m_i :

$$\frac{dL_{zi}}{dt} = M_{zi},$$

просуммируем по всем материальным точкам твердого тела:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n L_{zi} \right) = \sum_{i=1}^n M_{zi},$$

где

$$L_z = \sum_{i=1}^n L_{zi} = \sum_{i=1}^n m_i v_i r_i = \sum_{i=1}^n m_i \omega r_i^2 = I_z \omega.$$

L_z – момент импульса твердого тела относительно оси вращения z .

$$\sum_{i=1}^n M_{zi} = M_z,$$

где M_z – результирующий момент внешних сил относительно оси вращения.

В результате получим уравнение моментов, которое связывает скорость изменения момента импульса твердого тела с результирующим моментом внешних сил:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z. \quad (5.7)$$

В случае вращения твердого тела вокруг неподвижной оси момент инерции остается постоянным, и тогда левую часть уравнения (5.7) можно записать в виде:

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I\varepsilon.$$

Основной закон динамики вращения твёрдого тела имеет вид:

$$I\varepsilon = M_z. \quad (5.8)$$

Произведение момента инерции твердого тела относительно неподвижной оси вращения на угловое ускорение равно моменту внешних сил относительно этой оси.

5.9.Содержание работы

Целью данной работы является проверка основных уравнений вращательного движения с помощью маятника Абербека (рис. 5.6.). Этот прибор позволяет исследовать зависимость момента инерции тела от его массы и от распределения массы относительно оси вращения.

Маятник Абербека представляет собой крестообразный маятник. Он состоит из шкива и четырех взаимно перпендикулярных стержней. По стержням можно перемещать грузы одинаковой массы, благодаря чему можно изменять момент инерции исследуемой системы тел (шкив+стержни+грузы).

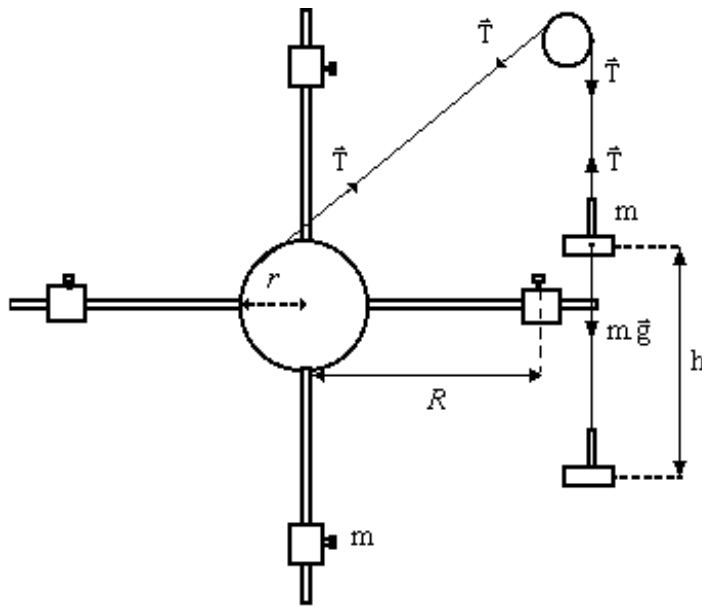


Рисунок 5.6.

На шкив наматывается нить, к концу которой крепится груз массой m . Под действием груза система приводится в равноускоренное вращение. Измерив время t падение груза с высоты h , можно определить ускорение его движения:

$$a = \frac{2h}{t^2}.$$

Угловое ускорение системе сообщает момент силы натяжения нити T . Силу натяжения T находим из уравнения динамики поступательного движения груза:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}.$$

Или в проекции по направлению движения груза:

$$ma = mg - T.$$

Откуда $T = m(g - a)$. Момент этой силы относительно оси вращения $M = T \cdot r = m(g - a) \cdot r$. Угловое ускорение системы равно $\varepsilon = a/r$. Так как нить сматывается со шкива без проскальзывания, то тангенциальное ускорение точек на поверхности шкива равно ускорению a опускающегося груза: $a_t = a = r\varepsilon$. Тогда $\varepsilon = a/r$.

Подставив теперь значения a , ε и M в основное уравнение динамики вращательного движения (5.10) получим формулу, с помощью которой можно экспериментально определить момент инерции маятника Абербека:

$$I = \frac{M}{\varepsilon} = \frac{m(g-a)r \cdot rt^2}{2h} = \frac{m(g - \frac{2h}{t^2})r^2 t^2}{2h} = \frac{m(gt^2 - 2h)r^2}{2h}. \quad (5.9)$$

Изменяя массу груза m можно изменить момент силы M и угловое ускорение ε . Подтверждением справедливости основного уравнения динамики вращательного движения (5.8) должно быть постоянство отношения:

$$I = \frac{M}{\varepsilon} = const. \quad (5.10)$$

С помощью маятника Абербека можно определить момент инерции каждого из четырех грузов, закрепленных на стержнях. Поскольку момент инерции системы есть сумма моментов инерции всех элементарных масс, из которых складывается система, момент инерции груза массой $m_{гр}$:

$$I_{гр} = \frac{(I - I_{кр})}{4}, \quad (5.11)$$

где I – момент инерции крестовины с грузами, $I_{кр}$ – момент инерции крестовины без грузов.

5.10. Порядок выполнения работы

1. Включите секундомер кнопкой «Сеть».
2. Снимите все четыре груза с крестовины маятника и перегрузок с опускающегося груза m_1 (масса груза m_1 и перегрузка Δm указаны на них).
3. Нажмите кнопку «Пуск». Вращая крестовину, поднимите груз на нити так, чтобы его основание находилось над световым лучом верхнего фотодатчика. Зафиксируйте груз в этом положении, отпустив кнопку «Пуск». Обнулите показания секундомера, нажав на кнопку «Сброс».
4. Нажмите кнопку «Пуск». После остановки грузов запишите показания секундомера в таблицу 5.1.

5. Отпустите тормоз, нажав кнопку «Сброс», и повторите измерения по пунктам 3÷5 еще два раза.

Таблица 5.1

№ п/п	r, м	Δr, м	h, м	Δh, м	m ₁ =		m ₂ =	
					t ₁ , с	Δt ₁ , с	t ₂ , с	Δt ₂ , с
1								
2								
3								
	$\bar{r} =$	$\overline{\Delta r} =$	$\bar{h} =$	$\overline{\Delta h} =$	$\bar{t}_1 =$	$\overline{\Delta t}_1 =$	$\bar{t}_2 =$	$\overline{\Delta t}_2 =$

7. На груз m_1 положить дополнительный перегрузок Δm . Значение $m_2 = m_1 + \Delta m$ записать в таблицу 5.1.

8. Повторить измерения по п.п. 3÷5 три раза. Данные занести в таблицу 5.1.

9. С помощью линейки не менее трех раз измерить высоту падения груза h и радиус шкива r . Высота падения равна расстоянию между верхним и нижним фотодатчиками. Данные занести в таблицу 5.1.

10. По формуле (5.9) рассчитать моменты инерции крестовины I_1 и I_2 при разных моментах действующих сил:

$$I_1 = \frac{m_1(gt_1^2 - 2h)r^2}{2h}, I_2 = \frac{m_2(gt_2^2 - 2h)r^2}{2h}.$$

11. Оценить абсолютную погрешность измерений по формуле:

$$\Delta I = I \left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{2\Delta r}{r} + \frac{2\Delta t}{t} + \frac{\Delta h}{h} \right),$$

где $\Delta m = 0.5 \cdot 10^{-3}$ кг; $\Delta r = 0.5 \cdot 10^{-3}$ м, $\Delta h = 0.5 \cdot 10^{-3}$ м.

12. Найти среднее значение момента инерции крестовины без грузов $I_{кр}$ и абсолютную ошибку ΔI :

$$I_{кр} = \frac{(I_1 + I_2)}{2}, \Delta I = \frac{\Delta I_1 + \Delta I_2}{2}. \quad (5.12)$$

13. Поместить грузы на крестовину. Не изменяя момента силы, действующего на крестовину ($m_2 = const$), исследовать зависимость момента инерции маятника I от расстояния грузов до оси вращения R . Данные занесите в таблицу 5.2. Измерения проводить согласно п.п. 1-5.

Таблица 5. 2

№ п/п	$R = 10 \cdot 10^{-2} \text{ м}$		$R = 15 \cdot 10^{-2} \text{ м}$		$R = 20 \cdot 10^{-2} \text{ м}$		$R = 25 \cdot 10^{-2} \text{ м}$	
	$t, \text{ с}$	$I, \text{ кг} \cdot \text{ м}^2$	$t, \text{ с}$	$I, \text{ кг} \cdot \text{ м}^2$	$t, \text{ с}$	$I, \text{ кг} \cdot \text{ м}^2$	$t, \text{ с}$	$I, \text{ кг} \cdot \text{ м}^2$
1.								
2								
3								
среднее								

14. Построить график зависимости момента инерции маятника I от расстояния грузов до оси вращения R (R – расстояние от оси вращения до центра масс груза).

15. Для одного из положений грузов ($R=0.15 \text{ м}$) по формуле (5.11) определить момент инерции $I_{гр.}$ одного из грузов.

16. Рассчитать момент инерции груза $I_{гр.р.}$ с помощью теоремы Штейнера:

$$I_{гр.р.} = I_0 + m_1 R^2 \text{ или } I_{гр.р.} = m_1 R^2.$$

т.к. $I_0 \ll m_1 R^2$ (здесь I_0 – момент инерции съемного груза относительно оси, проходящей через центр масс груза).

17. Сравнить результаты экспериментального определения момента инерции $I_{гр}$ и расчетного $I_{гр.р.}$. Сделайте выводы о правильности выбора физической модели.

18. Записать окончательные результаты для $I_{кр}$ и $I_{гр}$ с учетом погрешностей.

19. На основании пунктов 1÷13 сделайте выводы о выполнимости основного закона динамики вращательного движения.

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Цель работы.

1. Ознакомиться с основными характеристиками тела при вращательном движении.
2. Определить момент инерции тела сложной геометрической формы с помощью крутильного маятника.

Список литературы.

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики, т.1, гл.5, §§ 32-35. М.: Наука, 1989г.
2. Детлаф А.А. Яворский Б.М. Курс физики, М.: Высшая школа, 1989г.
3. Савельев И.В. Курс общей физики, т.1, §§ 38,39, М.: Наука, 1977г.

Порядок теоретической подготовки к выполнению работы.

Изучить и законспектировать в тетрадь ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы.

1. Что такое момент инерции материальной точки и твердого тела относительно данной оси вращения?
2. Что такое центральные и главные центральные оси вращения и по каким критериям определяется направление главных центральных осей по отношению к твердому телу?
3. Как связан с главными центральными моментами инерции момент инерции твердого тела относительно любой центральной оси?
4. Как между собой связаны моменты инерции твердого тела относительно двух параллельных осей? Теорема Штейнера?
5. Основной закон динамики вращения твердого тела?

6. Какова связь между моментом упругих сил и углом закручивания при деформации кручения упругого элемента?
7. При каких условиях колебания крутильного маятника будут гармоническими и при каких, ангармоническими?

Приборы и принадлежности.

1. Крутильный маятник.
2. Секундомер.
3. Эталонное и исследуемое тело.

Отчёт по лабораторной работе должен содержать:

1. цель работы;
2. приборы и принадлежности к работе;
3. схему лабораторной установки;
4. физическую модель;
5. математическая модель;
6. таблица результатов измерений;
7. результаты расчётов и расчет погрешностей;
8. вывод.

6.1. Введение

Вращательное движение твердых тел встречается и используется в технике повсеместно. Перечень применения вращательного движения в разнообразных узлах машин и приборов очень велик. Это могут быть маховики, валы, шкивы, турбины, роторы, шпиндели, центрифуги, сепараторы, колеса транспортных средств, компакт-диски в компьютерах и т.д. Важнейшей величиной, которая определяет вращение таких тел, является их *момент инерции*. Подобно тому, как без данных о массе тела невозможно рассчитать его поступательное движение, так и без данных о моменте инерции тела невозможно рассчитать его вращательное движение. Как

известно при поступательном движении тела его ускорение обратно пропорционально массе m . При вращательном движении тела его угловое ускорение обратно пропорционально не массе, а моменту инерции I . Таким образом m и I выражают инертные свойства одного и того же тела, только при поступательном движении эти свойства определяются массой, а при вращательном движении — моментом инерции. Важно подчеркнуть, что если масса данного тела однозначна, то момент инерции этого же тела может иметь самые различные значения в зависимости от выбора оси вращения. Поэтому нельзя утверждать, что «тело обладает моментом инерции I » без добавления слов «относительно данной оси вращения», поскольку при иной оси вращения момент инерции примет другое значение. Таких возможных значений столько, сколько возможных осей вращения, т. е. бесконечно много. Однако для избранной оси вращения момент инерции тела является вполне конкретной однозначной величиной.

Математический расчет момента инерции выполним только для тел простой геометрической формы, что недостаточно для решения реальных технических задач. Поэтому экспериментальное определение момента инерции является важной инженерной задачей. В данной работе Вам предлагается экспериментально определить момент инерции тела сложной геометрической формы методом крутильных колебаний.

6.2. Момент инерции

Твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек, расстояние между которыми неизменно. Вращательным движением твердого тела называют такое движение, при котором все точки тела описывают окружности вокруг оси его вращения. Если тело может вращаться вокруг неподвижной оси, то изменение его движения зависит от действующего на тело момента сил. *Моментом силы \vec{F} относительно неподвижной точки O* называется физическая величина, определяемая векторным произведением

радиуса-вектора r , проведенного из точки O в точку приложения силы B , на силу \vec{F} (рис. 6.1):

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}].$$

где \vec{M} – псевдовектор, направление которого совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от r к F .

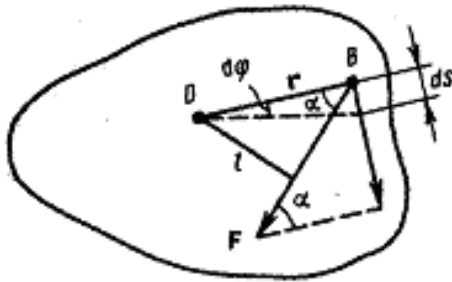


Рисунок 6.1.

Модуль момента силы равен:

$$M = rF \sin \alpha = Fl,$$

где $l = r \sin \alpha$ – кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой O ,

называемое *плечом силы*.

Моментом силы относительно неподвижной оси x называется скалярная величина M_x , равная проекции на эту ось вектора момента силы M , определенного относительно произвольной точки O данной оси x . Причем значение M_x не зависит от выбора положения точки O .

Величина:

$$I = mr^2,$$

численно равная произведению массы материальной точки на квадрат расстояния до оси вращения, называется *моментом инерции материальной точки*. Для твердого тела момент инерции выражается суммой моментов инерции всех материальных точек, образующих тело:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2 = I_1 + I_2 + \dots + I_n. \quad (6.1)$$

При вращательном движении твердого тела вокруг неподвижной оси его угловое ускорение ε прямо пропорционально действующему на тело

моменту сил M и обратно пропорционально его моменту инерции I относительно той же оси:

$$\varepsilon = \frac{M}{I}. \quad (6.2)$$

Так выражается основной закон динамики вращения твердого тела, когда его ось вращения не меняет своей ориентации и своего положения в пространстве. Этот закон является исходным во всех расчетах вращательного движения, но расчеты не могут быть выполнены без данных о моменте инерции твердого тела. Момент инерции твердого тела относительно данной оси является *мерой инертности* тела при его вращательном движении.

Вращающееся твердое тело обладает кинетической энергией. Если ось вращения неподвижна, то кинетическая энергия определяется через угловую скорость вращения ω и момент инерции тела I относительно данной оси:

$$W = \frac{I\omega^2}{2}. \quad (6.3)$$

Выражение (6.1) определяет физическое содержание момента инерции, но оно не пригодно для вычисления этой величины. Необходимо от суммы с большим числом слагаемых перейти к интегралу. Для этого твердое тело можно представить состоящим из элементарных масс dm , каждая из которых обладает своим элементарным моментом инерции $dI=r^2 dm=r^2 \rho dV$ относительно данной оси вращения, так что:

$$I = \int dI = \int r^2 dm = \rho \int_V r^2 dV, \quad (6.4)$$

где ρ – плотность однородного тела, r – расстояние элементарной массы до заданной оси вращения, а I – момент инерции всего тела относительно этой же оси.

Конкретное интегрирование требует дальнейшего преобразования исходного интеграла путем перехода к декартовой системе координат x, y, z . Но результат такого преобразования зависит от того, где выбрать начало координат и как направить оси x, y, z по отношению к твердому телу. Самый простой вариант получается в том случае, когда за начало координат избирается центр масс твердого тела, а оси координат x, y, z направляются по его главным центральным осям.

Центральными называются все оси, проходящие через центр масс твердого тела. Их бесконечно много, но среди них есть *три главные* и они при любой форме тела взаимно перпендикулярны, как оси координат x, y, z . Направление главных осей по отношению к твердому телу определяется не геометрическими, а физическими условиями. Относительно одной из них момент инерции тела должен быть максимальным, относительно другой - минимальным, относительно третьей - иметь промежуточное значение. Моменты инерции относительно этих осей называются *главными центральными моментами инерции*, соответственно I_x, I_y, I_z .

Момент инерции I относительно любой нецентральной оси, параллельной данной центральной оси, вычисляется согласно теоремы Штейнера:

$$I = I_c + md^2. \quad (6.6)$$

где m – масса тела, а d – расстояние между параллельными осями.

6.3. Определение момента инерции твердого тела методом крутильных колебаний

Крутильный маятник представлен функциональной схемой на рис. 6.2. Натянутая струна между базами A и B выполняет функции упругого элемента. При повороте рамки R (вместе с ее деталями P, ZN, K) струна закручивается на некоторый угол φ , возникает деформация кручения, в

результате чего появляется момент силы M , возвращающий рамку к положению равновесия:

$$M = -G \cdot \varphi, \quad (6.7)$$

здесь G – коэффициент упругости струны, φ – текущее угловое смещение маятника от положения равновесия.

Если деформация кручения струны не переходит в пластическую и остается строго упругой, то колебания крутильного маятника будут гармоническими и период колебаний будет постоянным и независимым от φ

(при возникновении пластических деформаций колебания становятся ангармоническими).

Именно этот возвращающий момент силы M (6.7) и сообщает маятнику, момент инерции которого равен I , угловое ускорение ε :

$$M = I\varepsilon, \text{ где } \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}. \quad (6.8)$$

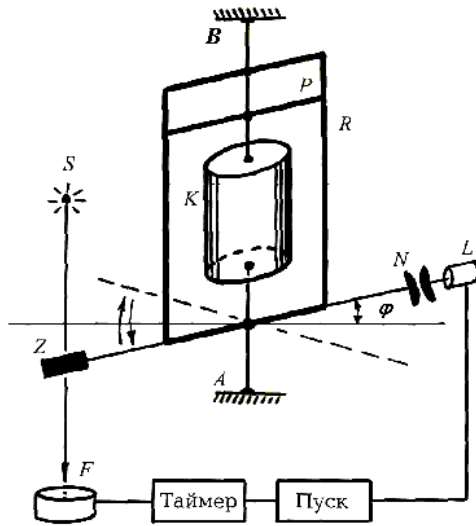


Рисунок 6.2.

Крутильные колебания маятника, как следует из (6.7) и (6.8), описываются следующим дифференциальным уравнением:

$$I \cdot \ddot{\varphi} + G \cdot \varphi = 0 \text{ или } \ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0, \quad (6.9)$$

где принято обозначение:

$$\omega^2 = \frac{G}{I}. \quad (6.10)$$

Уравнение такого вида соответствует гармоническому осциллятору и описывает его гармонические колебания, в данном случае колебания

углового смещения маятника относительно его положения равновесия. Решением уравнения (6.9) является гармоническая функция:

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t + \alpha), \quad (6.11)$$

где φ_0 – амплитуда углового смещения, равная начальному угловому отклонению маятника перед запуском колебаний, а ω – циклическая частота колебаний, связанная с периодом колебаний соотношением:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (6.12)$$

Из совместного решения (6.10) и (6.12) вытекают простые формулы для определения I или G через экспериментально определяемый период колебаний крутильного маятника:

$$I = \frac{G}{4\pi^2} T^2 \text{ и } G = \frac{4\pi^2 I}{T^2}. \quad (6.13)$$

Из этих формул следует, что данных о периоде колебаний недостаточно для измерения величин I или G , т. к. при определении одной из них необходимы еще данные о другой. Тем не менее, в данной работе предлагается такая методика эксперимента с крутильным маятником, когда I определяется только через T и сведения о величине G при этом не требуются.

Сначала на «холостом ходу» определяется период колебаний базовой рамки крутильного маятника T_0 . Затем базовая рамка заправляется эталонным телом с известным моментом инерции I_3 и снова определяется период колебаний маятника T_1 , когда его общий момент инерции складывается из I_0 и I_3 . Наконец вместо эталонного тела базовая рамка заправляется исследуемым телом с неизвестным моментом инерции I и снова определяется период колебаний маятника T_2 , когда его общий момент инерции складывается из I_0 и I . Тогда в соответствии с (6.13) и (6.14) можно записать:

$$I_0 = \frac{G}{4\pi^2} T_0^2; I_1 = I_0 + I_3 = \frac{G}{4\pi^2} T_1^2; I_2 = I_0 + I = \frac{G}{4\pi^2} T_2^2. \quad (6.14)$$

Из совместного решения этих уравнений вытекают окончательные расчетные формулы для определения момента инерции:

$$I_0 = I_3 \frac{T_0^2}{T_1^2 - T_0^2}, \quad (6.15)$$

$$I = I_3 \frac{T_2^2 - T_0^2}{T_1^2 - T_0^2}. \quad (6.16)$$

В качестве эталонного твердого тела предлагается металлический цилиндр. После измерения массы и радиуса цилиндра, его момент инерции вычисляется по формуле:

$$I_3 = \frac{1}{2} mR^2. \quad (6.17)$$

При этом предполагается такое закрепление цилиндра в базовой рамке, когда его геометрическая ось совпадает с осью вращения рамки.

6.4. Порядок выполнения работы

1. Измерить массу и диаметр эталонного тела (цилиндра) с помощью рычажных весов и штангенциркуля. Данные занести в таблицу 6.1.

Таблица 6.1

$m, 10^{-3} \text{ кг}$	$\Delta m, 10^{-3} \text{ кг}$	$R, 10^{-2} \text{ м}$	$\Delta R, 10^{-2} \text{ м}$
	0.05		0.05

2. По данным таблицы 6.1 рассчитать момент инерции эталонного тела и ошибки его определения:

$$I_3 = \frac{1}{2} mR^2, \quad \varepsilon = \frac{\Delta I_3}{I_3} = \frac{\Delta m}{m} + 2 \frac{\Delta R}{R}, \quad \Delta I_3 = \varepsilon I_3.$$

3. Включить секундомер, нажав кнопку «Сеть». Кнопки «Сбр», «Пуск», «Стоп» должны быть отжаты.

4. Повернуть базовую рамку до касания контактной площадки с электромагнитом. Запустить колебания крутильного маятника, нажав кнопку «Пуск».

5. Измерить время десяти полных колебаний t_0 . Для этого необходимо нажать кнопку «Стоп» в момент, когда на табло секундомера число колебаний будет равно девяти. Измерения повторить не менее трех раз. Данные занести в таблицу 6.2.

6. Рассчитать значение периода колебаний базовой рамки T_0 для трех случаев: $T_0 = t_0/n$.

Найти среднее значение \bar{T}_0 .

7. Заправить базовую рамку эталонным телом. Повторить измерения по п.п.3-6 и определить значение периода колебаний базовой рамки с эталонным телом T_1 . Все данные занести в таблицу 6.2.

8. Заправить базовую рамку исследуемым телом. Определить период колебаний базовой рамки с исследуемым телом T_2 (см. п.п.3-6). Данные занести в таблицу 6.2.

Таблица 6.2

Колебания маятника без эталонного тела				Колебания маятника с эталонным телом				Колебания маятника с исследуемым телом			
t_0, c	n	T_0, c	$\Delta T_0, c$	t_1, c	n	T_1, c	$\Delta T_1, c$	t_2, c	n	T_2, c	$\Delta T_2, c$
	10				10				10		
	10				10				10		
	10				10				10		
		$\bar{T}_0 =$	$\overline{\Delta T}_0 =$			$\bar{T}_1 =$	$\overline{\Delta T}_1 =$			$\bar{T}_2 =$	$\overline{\Delta T}_2 =$

9. По данным таблицы 6.2 рассчитать момент инерции базовой рамки крутильного маятника и ошибки его определения:

$$I_0 = I_3 \frac{T_0^2}{T_1^2 - T_0^2},$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\Delta I_0}{I_0} = \frac{\Delta I_3}{I_3} + \frac{2\Delta T_0}{T_0} + 2 \frac{T_1 \Delta T_1 + T_0 \Delta T_0}{(T_1^2 - T_0^2)},$$

$$\Delta I_0 = \varepsilon_0 I_0,$$

где значение

$$\frac{\Delta I_3}{I_3} = \varepsilon_3$$

берем из п.2.

10. По данным таблицы 6.2 рассчитать момент инерции исследуемого тела и ошибки его определения:

$$I = I_3 \frac{T_2^2 - T_0^2}{T_1^2 - T_0^2},$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta I_3}{I_3} + 2 \frac{T_2 \Delta T_2 + T_0 \Delta T_0}{(T_2^2 - T_0^2)} + 2 \frac{T_1 \Delta T_1 + T_0 \Delta T_0}{(T_1^2 - T_0^2)},$$

$$\Delta I = \varepsilon I.$$

11. Записать окончательный результат с учетом погрешностей:

$$I_1 = I_3 \pm \Delta I_3, \quad \text{при } \varepsilon = \dots \%$$

$$I_2 = I_0 \pm \Delta I_0, \quad \text{при } \varepsilon = \dots \%$$

$$I_3 = I \pm \Delta I, \quad \text{при } \varepsilon = \dots \%$$

7. ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ПОЛЕТА СНАРЯДА БАЛЛИСТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Цель работы.

1. Изучить основные понятия и законы динамики вращательного движения.
2. Измерить скорость полета снаряда методом крутильного баллистического маятника.

Контрольные вопросы.

1. Что такое момент импульса материальной точки относительно неподвижной точки и проекция момента импульса относительно оси? Как определяется направление момента импульса?
2. Что такое момент импульса тела относительно оси?
3. Что такое момент инерции материальной точки и тела? Сформулируйте теорему Штейнера?
4. Введите понятие момента силы относительно точки, относительно оси. Как определяется направление этого псевдовектора?
5. Получить основное уравнение динамики вращательного движения вокруг неподвижной оси.
6. Чему равна кинетическая энергия вращательного движения?
7. Сформулируйте закон сохранения момента импульса.
8. Запишите и поясните формулу периода колебаний баллистического маятника.
9. Записать законы сохранения применительно к неупругому столкновению снаряда с баллистическим маятником. Пояснить физический смысл всех величин в этих законах.

Список литературы.

1. Трофимова Т.И. Курс физики, М.: Высшая школа, 1998 г.

2. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики, М.: Высшая школа, 1989 г.
3. Савельев И.В. Курс общей физики. М.: Наука, 1977 г.

7.1. Теоретическое введение

Рассмотрение механического движения реального физического тела в общем случае представляет очень сложную задачу. В связи с этим в физике используют упрощенные модели реальных тел. Такое возможно, если при описании движения реального тела некоторые его свойства малосущественны по сравнению с другими или ими можно пренебречь. В механике широко используется три основные модели:

- 1) материальная точка;
- 2) абсолютно твердое тело;
- 3) сплошная среда.

В первой модели пренебрегают размерами, формой и внутренним строением тела; во второй учитывают размеры и форму, но пренебрегают деформацией и строением тела; в третьей учитывают размеры, форму и деформацию тела, но пренебрегают его атомно-молекулярным строением. Плодотворность перечисленных моделей доказывается совпадением с высокой точностью выводов механики с экспериментом для очень широкого круга задач.

Движение твердого тела в общем виде описывается двумя векторными уравнениями:

1. Уравнение движения центра масс:

$$m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{внеш}}, \quad (7.1)$$

где \vec{v}_c – скорость центра масс, $\sum \vec{F}_{\text{внеш}}$ – сумма всех внешних сил, приложенных к телу.

2. Уравнение моментов:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_{\text{внеш}}, \quad (7.2)$$

где \vec{L} – момент импульса твердого тела относительно некоторой точки, $\sum \vec{M}_{\text{внеш}}$ – суммарный момент внешних сил относительно той же точки.

7.2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

7.2.1. Связь момента импульса твердого тела с угловой скоростью вращения. Момент инерции

Рассмотрим абсолютно твердое тело, которое вращается с угловой скоростью ω относительно неподвижной оси. Разобьем мысленно тело на совокупность n частиц (материальных точек), одна из которых Δm_i выделена на рисунке. Траектория движения любой частицы тела представляет собой окружность с центром на оси вращения. Угловая скорость вращения всех частиц тела одинакова и равна ω , а их линейные скорости различны.

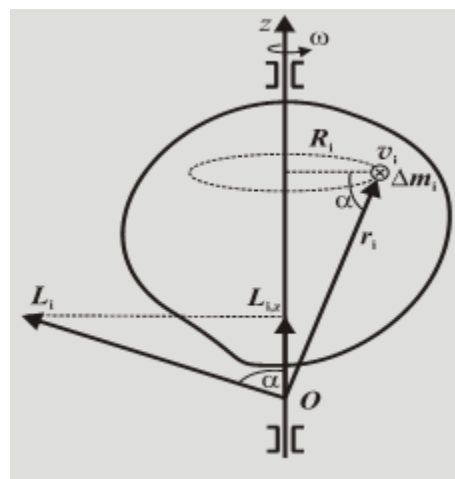


Рисунок 7.1.

В частности, линейная скорость выделенной частицы Δm_i (на рис. 7.1. она направлена «от нас») равна:

$$v_i = \omega R_i, \quad (7.3)$$

где R_i – радиус окружности, которую описывает частица Δm_i .

Выберем на оси z некоторую точку O . По определению момент импульса частицы Δm_i относительно точки O равен векторному произведению:

$$d\vec{L}_i = [\vec{r}_i, \vec{p}_i], \quad (7.4)$$

где \vec{r}_i – радиус-вектор частицы Δm_i относительно точки O , $\vec{p}_i = \Delta m_i \vec{v}_i$ – импульс этой частицы. Направление вектора \vec{L}_i определяется правилом правой руки. Согласно этому правилу четыре пальца правой руки направляют вдоль вектора \vec{r}_i таким образом, чтобы, сгибая пальцы можно было направить их вдоль вектора \vec{p}_i . Если рука будет расположена в соответствии с этим правилом, то большой палец укажет направление вектора \vec{L}_i .

Вектор \vec{L}_i перпендикулярен векторам \vec{r}_i и \vec{v}_i . Учитывая, что \vec{r}_i и \vec{v}_i также взаимно перпендикулярны, можно найти модуль (длину) вектора \vec{L}_i :

$$L_i = r_i \Delta m_i v_i \sin 90^\circ = \Delta m_i r_i v_i. \quad (7.5)$$

Проекция момента импульса \vec{L}_i на ось z называется моментом импульса частицы Δm_i относительно оси.

Как видно из рис. 7.1:

$$L_{iz} = L_i \cos \alpha = \Delta m_i r_i v_i \cos \alpha = \Delta m_i R_i v_i. \quad (7.6)$$

Учтем далее соотношение (7.3), тогда величину L_{iz} можно записать в виде:

$$L_{iz} = \Delta m_i R_i^2 \omega. \quad (7.7)$$

Произведение массы материальной точки Δm_i на квадрат расстояния до оси R_i , называется *моментом инерции материальной точки* относительно этой оси:

$$I_i = \Delta m_i R_i^2. \quad (7.8)$$

Используя выражение для момента инерции материальной точки, формулу (7.7) для момента импульса материальной точки можно представить в виде:

$$L_{iz} = I_i \omega. \quad (7.9)$$

Если просуммировать L_{iz} для всех частиц, составляющих тело, то получим момент импульса тела относительно оси:

$$L_z = \sum L_{iz} = \omega \sum \Delta m_i r_i^2. \quad (7.10)$$

Величина:

$$I = \sum_{i=0}^n \Delta m_i r_i^2, \quad (7.11)$$

равная сумме произведений масс материальных точек, из которых состоит тело, на квадрат их расстояний до оси вращения, называется *моментом инерции тела* относительно этой оси.

Следовательно, *момент импульса тела относительно оси z* равен произведению момента инерции тела относительно этой же оси на угловую скорость вращения:

$$L_z = I \omega. \quad (7.12)$$

Из определения момента инерции (7.11) следует, что эта величина аддитивна. Это означает, что момент инерции любого тела равен сумме моментов инерции его частей.

Для вычисления момента инерции сплошного тела, в котором масса распределена непрерывно, необходимо в формуле (7.11) заменить суммирование по дискретным частицам Δm_i на интегрирование по объему

тела. Для сплошного тела роль массы Δm_i дискретной частицы играет элемент массы $dm = \rho dV$, где ρ – плотность.

Момент инерции сплошного тела относительно оси z равен:

$$I = \int_V R^2 dm = \int_V \rho R^2 dV, \quad (7.13)$$

где R – расстояние от объема dV до оси.

В ряде случаев нахождению момента инерции тела помогает *теорема Штейнера*, согласно которой момент инерции тела I относительно произвольной оси O_1O_1' равен сумме его момента инерции I_c относительно оси OO' параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния d между осями (рис. 7.2):

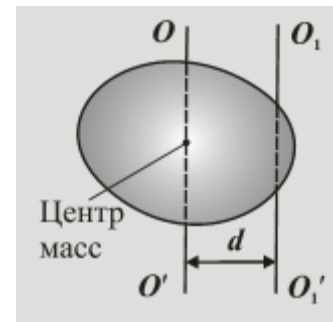


Рисунок 7.2. Теорема Штейнера

$$I = I_c + md^2. \quad (7.14)$$

7.2.2. Момент силы относительно точки и момент силы относительно оси

Пусть к одной из точек твердого тела приложена сила \vec{F} . Моментом силы \vec{M} относительно произвольной точки O называется векторное произведение радиуса-вектора \vec{r} точки приложения силы, проведенного из точки O на силу \vec{F} :

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]. \quad (7.15)$$

Направление вектора \vec{M} определяется правилом правой руки. Вектор \vec{M} характеризует способность силы \vec{F} вращать тело вокруг точки O , и поэтому его называют также вращательным моментом

Проекция вектора \vec{M} на произвольную ось z , проходящую через точку O , называется моментом силы относительно этой оси (см. рис. 7.3)

Для определения величины M_z разложим силу \vec{F} на три взаимно-перпендикулярные составляющие: F_{\parallel} – параллельную оси z ; F_{\perp} – перпендикулярную оси z ; F_{τ} – направленную по касательной к окружности радиуса R (на рис. 7.3 она направлена “от нас”):

$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp} + \vec{F}_{\tau}.$$

Тогда момент силы \vec{F} относительно точки O можно представить в виде:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp} + \vec{F}_{\tau}] = [\vec{r}, \vec{F}_{\parallel}] + [\vec{r}, \vec{F}_{\perp}] + [\vec{r}, \vec{F}_{\tau}] = \vec{M}_{\parallel} + \vec{M}_{\perp} + \vec{M}_{\tau}.$$

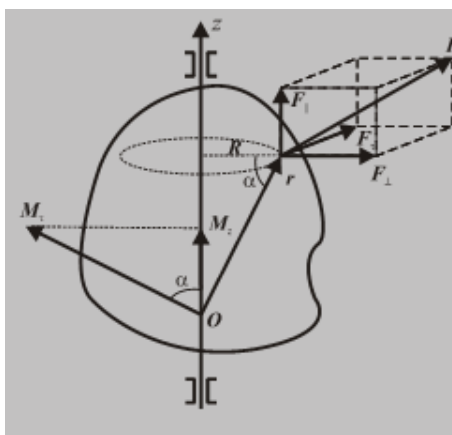


Рисунок 7.3. Момент силы относительно оси.

где M_{\parallel} , M_{\perp} , M_{τ} – моменты соответствующих сил. Согласно правилу правой руки моменты сил M_{\parallel} и M_{\perp} , перпендикулярны оси z и их проекции на ось z равны нулю. Момент M_{τ} направлен так, как показано на рис.7.3.

Таким образом, проекция на ось z вектора \vec{M} равна:

$$M_z = M_{\tau,z} = M_{\tau} \cos \alpha, \quad (7.16)$$

т.к. \vec{F}_{τ} и \vec{r} взаимно перпендикулярны, то:

$$M_{\tau} = r F_{\tau} \sin 90^{\circ}. \quad (7.17)$$

Подставляя (7.16) в (7.15) и учитывая, что $r \cos \alpha = R$ (см. рис.7.3), находим момент силы \vec{F} относительно оси z :

$$M_z = F_\tau R. \quad (7.18)$$

Из трех составляющих силы \vec{F} вращение вокруг оси z может вызвать только сила F_τ . Таким образом, момент силы относительно оси характеризует способность силы вращать тело вокруг этой оси.

7.2.3. Основное уравнение динамики вращательного движения тела вокруг неподвижной оси

Для твердого тела как системы частиц справедливо уравнение моментов (7.2). Запишем его в проекции на ось z :

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z. \quad (7.19)$$

Подставив L_z из уравнения (7.11) получаем *основное уравнение динамики вращательного движения тела вокруг неподвижной оси*:

$$I \frac{d\omega}{dt} = M_z \text{ или } I\varepsilon = M_z, \quad (7.20)$$

где I – момент инерции тела относительно оси z , ω и $\varepsilon = d\omega/dt$ – угловая скорость и угловое ускорение соответственно, M_z – момент внешних сил относительно оси z .

Уравнение (7.20) аналогично уравнению второго закона Ньютона $ma_z = \Sigma F_z$. Роль массы играет момент инерции, роль линейного ускорения – угловое ускорение и, наконец, роль результирующей силы – суммарный момент внешних сил относительно оси z .

Из (7.20) следует, что в случае, когда суммарный момент внешних сил относительно оси z положителен, $\varepsilon > 0$. Это означает, что вращение будет ускоренным. В случае же, когда суммарный момент внешних сил относительно оси z отрицателен, $\varepsilon < 0$ и вращение будет замедленным.

7.2.4. Кинетическая энергия вращающегося тела

Когда тело вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω , каждая частица массой Δm_i , отстоящая от оси вращения на расстоянии R_i , обладает скоростью $v_i = \omega R_i$ (см. формулу (7.3)). Следовательно, ее кинетическая энергия равна:

$$(\Delta W_k)_i = \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i \omega_i^2 R_i^2.$$

Сумма энергий $(\Delta W_k)_i$ даст кинетическую энергию всего тела:

$$W_k = \sum (\Delta W_k)_i = \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum \Delta m_i R_i^2.$$

Приняв во внимание формулу (7.11), придем к выражению:

$$W_k = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (7.21)$$

Это выражение аналогично выражению для кинетической энергии материальной точки (и поступательно движущегося тела): $W_k = \frac{1}{2} m v^2$. Роль массы играет момент инерции, а роль линейной скорости – угловая скорость.

7.2.5. Закон сохранения момента импульса тела, вращающегося около закрепленной оси

Из основного уравнения динамики вращательного движения тела (7.20) следует, что если на тело никакие внешние силы не действуют или действуют такие силы, результирующий момент которых относительно оси z равен нулю, то момент импульса тела относительно этой оси будет величиной постоянной:

$$I \omega = const. \quad (7.22)$$

В этом состоит закон сохранения момента импульса тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Если момент инерции тела не изменяется (что имеет место для абсолютно твердого тела), то из (7.22) следует постоянство угловой скорости ω . Однако, если тело не абсолютно твердое или если оно состоит из отдельных частей, способных под действием внутренних сил перемещаться друг относительно друга, то момент инерции тела может изменяться и угловая скорость уже не будет постоянной. Изменением момента инерции своего тела для получения быстрых вращений пользуются фигуристы, балерины, акробаты.

Закон сохранения момента импульса выполняется и для системы тел. Если система *замкнута*, т. е. не взаимодействует с внешними (не входящими в систему) телами, то сохраняется ее суммарный момент импульса:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots = const, \quad (7.23)$$

где \vec{L}_i – момент импульса i -ой части системы.

Если система *незамкнута*, но результирующий момент внешних сил относительно оси z равен нулю: $M_z=0$, то остается постоянным суммарный момент импульса системы относительно этой оси:

$$L_z = L_{1z} + L_{2z} + \dots = const, \quad (7.24)$$

где L_{iz} – проекция на ось z момента импульса i -ой части системы.

Закон сохранения момента импульса проявляется во всех устройствах, которые содержат вращающиеся части: в электродвигателях, автомобилях, самолетах и т. д.

7.2.6. Описание установки.

Скорость снаряда в данной работе измеряется с помощью баллистического маятника FPM-09. Он представляет собой физический крутильный маятник с собственным моментом инерции, значительно

превышающим момент инерции снаряда относительно оси колебаний. Период колебаний такого маятника должен быть намного больше, чем время столкновения снаряда с маятником. Эти требования удовлетворены соответствующим набором масс снаряда, маятника и систем его подвеса.

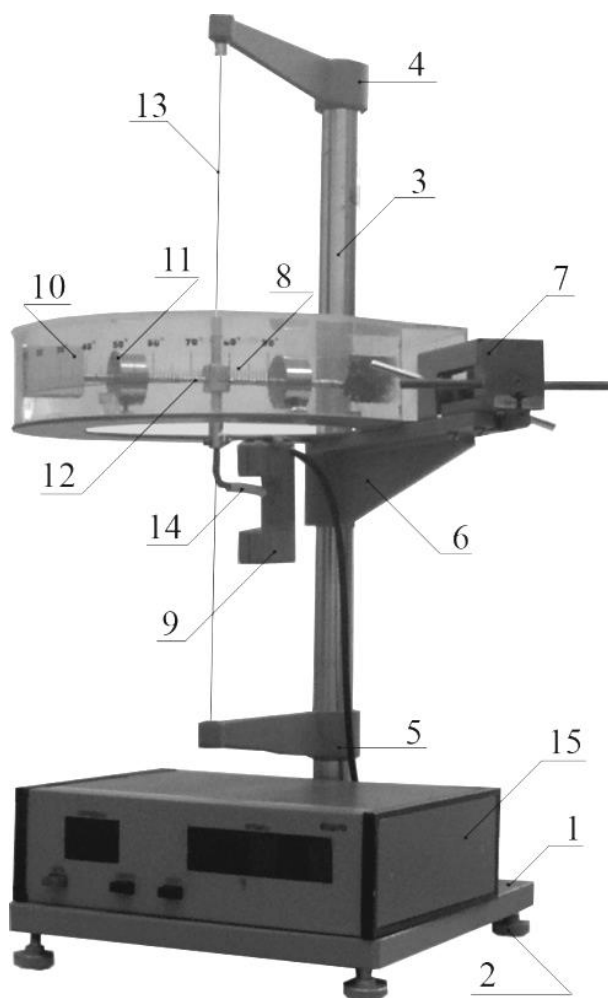


Рисунок 7.4. Баллистический маятник

Общий вид баллистического маятника показан на рисунке 7.4. Основание (1) оснащено регулируемыми ножками (2) для ровной установки прибора. В основании закреплена стойка (3), на которой крепятся верхний (4), нижний (5) и средний (6) кронштейны. К среднему кронштейну прикреплено метательное устройство (7) а также прозрачный экран с нанесенной на него угловой шкалой (8) и фотоэлектрический датчик (9).

Кронштейны (5) и (6) имеют зажимы для крепления стальной проволоки (13), на которой подвешен маятник, состоящий из двух чашек, заполненных пластилином (10), двух перемещающихся грузов (11), двух стержней (12), водила (14).

Фотоэлектрический датчик соединен с секундомером (15). Фотоэлектрический датчик устроен так, что световой поток от лампочки падает на фототранзистор. Во время качания маятника водило (14) прерывает периодически этот поток, обеспечивая счет периодов колебаний маятника.

7.2.7. Вывод рабочей формулы.

После выстрела снаряд массой m вылетает из стреляющего устройства со скоростью v , попадает в мишень с пластилином, застревает в ней на расстоянии r от оси вращения, после чего система маятник-снаряд движется как одно целое. Неправильно было бы применить для описания этого неупругого столкновения закон сохранения импульса. Маятник нельзя принять за материальную точку, после удара он вместе с пулей вращается.

При рассмотрении данного неупругого столкновения нужно использовать закон сохранения момента импульса. Возможность применения этого закона основана на следующем. Во время удара на систему маятник-снаряд действуют две внешние силы: сила тяжести и силы реакции в точках приложения опоры. Вторая сила проходит через ось вращения, поэтому ее момент равен нулю. Учитывая, что за время удара маятник не успевает заметно отклониться от вертикали, и принимая во внимание, условие $M \gg m$ (масса перемещаемых грузов M гораздо больше массы снаряда m), можно считать, что и первая сила во время удара проходит через ось и, следовательно, ее момент также равен нулю. Значит моменты импульса системы в начале и конце процесса удара равны: $L_1 = L_2$.

В начальный момент времени момент импульса пули относительно оси вращения равен $L_1 = mvr$. Угловая скорость чашки в начальный момент времени равна нулю, поэтому ее момент импульса относительно оси вращения также равен нулю. Момент импульса маятника L_2 с застрявшей пулей непосредственно после удара найдем как произведение момента инерции системы I относительно оси вращения на угловую скорость ω в этот момент. Момент инерции системы I равен сумме момента инерции I_0 неизменяемой в опыте подвижной части маятника, момента инерции $2MR^2$ перемещаемых грузов и момента инерции mr^2 пули. Момент инерции пули много меньше момента инерции подвижной части маятника, поэтому им можно пренебречь. Тогда $L_2 = (I_0 + 2MR^2)\omega$.

Таким образом, на основании закона сохранения импульса:

$$mvr = (I_0 + 2MR^2)\omega. \quad (7.25)$$

После удара механическая энергия движущейся системы маятник-снаряд будет сохраняться, т. к. на нее действуют только консервативные силы: сила тяжести, сила упругости и сила реакции опоры, которая не совершает работы, т. к. перемещение опоры равно нулю. Следовательно, при отклонении маятника вместе с пулей от положения равновесия кинетическая энергия системы будет превращаться в потенциальную энергию упруго закрученной проволоки подвесок. По закону сохранения энергии:

$$\frac{1}{2}(I_0 + 2MR^2)\omega^2 = \frac{1}{2}k\varphi^2, \quad (7.26)$$

где k – модуль кручения данной проволоки (коэффициент упругости), φ – наибольший угол отклонения подвижной системы.

Маятник совершает крутильные колебания, период которых вычисляется по формуле:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + 2MR^2}{k}}. \quad (7.27)$$

Уравнения (7.25), (7.26) и уравнение (7.27), записанное для двух положений перемещающихся грузов образуют систему четырех уравнений, содержащую четыре неизвестные величины: v , ω , k и I_0 . Решая эту систему, получаем:

$$v = \frac{4\pi T_1 M(R_1^2 - R_2^2)\varphi}{mr(T_1^2 - T_2^2)}. \quad (7.28)$$

После перевода угла φ из радиан в градусы формула примет следующий вид:

$$v = \frac{\pi^2 T_1 M (R_2^2 - R_1^2) n}{45 m r (T_2^2 - T_1^2)}, \quad (7.29)$$

где n – отсчет наибольшего отклонения баллистического маятника в градусах, T_1, T_2 – периоды колебаний крутильного маятника при различном положении подвижных грузов M (на минимальном R_1 и максимальном R_2 расстоянии от оси вращения).

Из полученного выражения видно, что для определения скорости снаряда необходимо измерить периоды колебаний T_1 и T_2 , угол наибольшего отклонения n подвижной системы от положения равновесия после попадания снаряда; расстояние r от места внедрения снаряда в пластилин до нити подвеса. Величина M задана. Масса снаряда m определяется путём взвешивания.

7.2.8. Порядок выполнения работы

1. Подготовить таблицу 7.1 и занести в нее полученные по ходу выполнения работы результаты измерений и расчетов.

Таблица 7.1. Таблица измерений и погрешностей измеряемых величин.

$M,$ 10^{-3} кг	$m,$ 10^{-3} кг	$R_1,$ 10^{-3} м	$T_1, \text{с}$	$R_2,$ 10^{-3} м	$T_2, \text{с}$	$n,$ град	$\Delta n,$ град	$r,$ 10^{-3} м	$\Delta r,$ 10^{-3} м
							1		0.5
							1		0.5
							1		0.5

2. Подвижные грузы M маятника разместить на наименьшем расстоянии R_1 от оси вращения (нити подвеса). Измерить это расстояние и записать значения R_1 в таблицу.

3. Установить баллистический маятник по шкале на 0° .

4. Включить прибор в сеть. Нажмите кнопки «Стоп» и «Сброс».

5. Зарядите снарядом стреляющее устройство и произведите выстрел.
6. Измерьте угол отклонения маятника n и период колебаний маятника T_1 . Для измерения периода колебаний необходимо нажать кнопку «Стоп» в момент, когда счетчик периодов показывает **9 колебаний**. Тогда на десятом колебании счет прекращается и период колебаний находим путем деления времени колебаний на число колебаний.
7. Замерьте расстояние r от места внедрения снаряда в пластилин до оси вращения.
8. Повторить измерения по пунктам 5-6 не менее двух раз. Значения n , r и R_1 занести в таблицу 7.1.
9. Переместить грузы M на максимальное расстояние R_2 от оси вращения. Измерить это расстояние и записать значение R_2 в таблицу 7.1. Затем вручную отведите маятник на угол n из первого эксперимента и отпустив его, измерьте период колебаний баллистического маятника T_2 при новом расположении грузов (по аналогии с пунктом 6). Измерение повторить не менее двух раз.
10. По формуле (7.29) рассчитайте скорость летящего снаряда.
11. Абсолютную погрешность измерений рассчитать по формуле:

$$\Delta v = \left(\frac{\Delta n}{n} + \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta r}{r} \right) \cdot v.$$

8. СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Цель работы.

1. Изучить теоретический материал по сложению гармонических колебаний.
2. Экспериментально получить фигуры Лиссажу при сложении электромагнитных колебаний.
3. Определить отношение частот колебаний двойного физического маятника.

Список литературы.

1. Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова.– 16-е изд., стер.– М.: Издательский центр «Академия», 2008.– 560 с.
2. Физический практикум. Под ред. Кембровского Г.С.– Мн.: Университетское, 1986. – 352 с.

Порядок теоретической подготовки к выполнению работы.

Разобрать и законспектировать в рабочую тетрадь ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы:

1. Что называется колебанием? Дайте определение свободных и вынужденных колебаний, автоколебаний.
2. Какие колебания называют гармоническими?
3. Дайте определение следующих величин: амплитуда, период, частота, круговая (циклическая) частота, фаза, начальная фаза колебаний.
4. Как изображаются гармонические колебания методом векторных диаграмм?

5. Сформулируйте условия, при которых при сложении двух колебаний одного направления и одинаковой частоты амплитуда результирующего колебания имеет максимальное и минимальное значения.
6. Какие колебания называются биениями?
7. Что называется периодом биений и от чего он зависит?
8. Что называется фигурой Лиссажу?
9. Способы определения отношения частот складываемых колебаний по фигурам Лиссажу.

8.1. Введение. Гармонические колебания

Колебаниями называются движения или процессы, повторяющиеся во времени.

Колебания широко распространены в природе и технике. Повторяемостью обладают, например, качания маятника часов, колебания струны, напряжение между обкладками конденсатора в колебательном контуре радиоприемника и т.п.

В зависимости от характера воздействия на колеблющуюся систему различают свободные (или собственные) колебания, вынужденные колебания, автоколебания.

Свободными или *собственными* называются такие колебания, которые совершаются без внешних воздействий за счет первоначально полученной системой энергии.

Вынужденными называются такие колебания, которые возникают в системе под действием внешней периодически изменяющейся силы.

Автоколебания, как и вынужденные колебания, сопровождаются воздействием на колеблющуюся систему внешней периодической силы, однако моменты времени, когда осуществляются эти воздействия, задаются самой колеблющейся системой.

Колебания, при которых величины, характеризующие колебательный процесс, изменяются со временем по закону синуса или косинуса, называются *гармоническими*. Все колебания в природе и технике или имеют характер очень близкий к гармоническим колебаниям, или их можно представить как наложение нескольких гармонических колебаний.

В случае гармонических колебаний изменение со временем колеблющейся величины x описывается формулой:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (8.1)$$

График гармонического колебания показан на рис.1. Величина x характеризует отклонение колеблющейся системы от положения равновесия ($x=0$) в любой момент времени t .

Наибольшее значение колеблющейся величины x называется *амплитудой* колебаний A , которая остается постоянной.

Величина $(\omega t + \varphi_0)$, стоящая под знаком косинуса, называется *фазой* колебаний. Она определяет состояние системы, т.е. положение и направление движения колеблющегося тела в данный момент времени.

Постоянная величина φ_0 представляет собой значение фазы в момент времени $t=0$ и называется *начальной фазой* колебаний. Начальная фаза

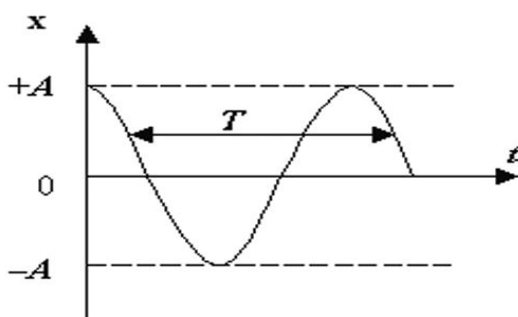


Рисунок 8.1. График гармонического колебания.

определяет значение x в начальный момент времени. Для колебания, изображенного на рис. 8.1, начальная фаза $\varphi_0=0$. Периодом колебаний T называется наименьший промежуток времени, по истечении которого состояние колеблющейся системы повторяется (совершается одно

полное колебание) при этом фаза колебания получает приращение 2π :

$$\omega(t + T) + \varphi_0 = (\omega t + \varphi_0) + 2\pi.$$

Откуда

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (8.2)$$

Частотой колебаний ν называется величина, обратная периоду колебаний. Частота равна числу полных колебаний, совершаемых в единицу времени:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (8.3)$$

Единица измерения частоты – Герц. 1 Гц – частота периодического процесса, при котором за 1 секунду совершается одно полное колебание.

Величину ω называют *круговой* или *циклической* частотой. Она равна числу колебаний за 2π секунд и связана с обычной частотой соотношением:

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (8.4)$$

Первая и вторая производные по времени от гармонически колеблющейся величины x (скорость и ускорение) также совершают гармонические колебания с той же циклической частотой:

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}), \\ a &= \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi). \end{aligned}$$

Если сравнить последнее уравнение с уравнением (8.1), то видно, что x удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \quad (8.5)$$

Это уравнение называется дифференциальным уравнением

гармонического колебания.

Гармонические колебания изображаются графически методом вращающегося вектора амплитуды или методом *векторных диаграмм*.

Из произвольной точки O , выбранной на оси x , под углом φ_0 , равным начальной фазе колебания, откладывается вектор \vec{A} , модуль которого равен амплитуде A рассматриваемого колебания (рис. 8.2). Если этот вектор будет вращаться с угловой скоростью ω , то проекция вектора \vec{A} на ось y будет совершать колебания по закону $y = A\sin(\omega t + \varphi_0)$, с амплитудой, равной длине вектора \vec{A} , с круговой частотой, равной угловой скорости вращения

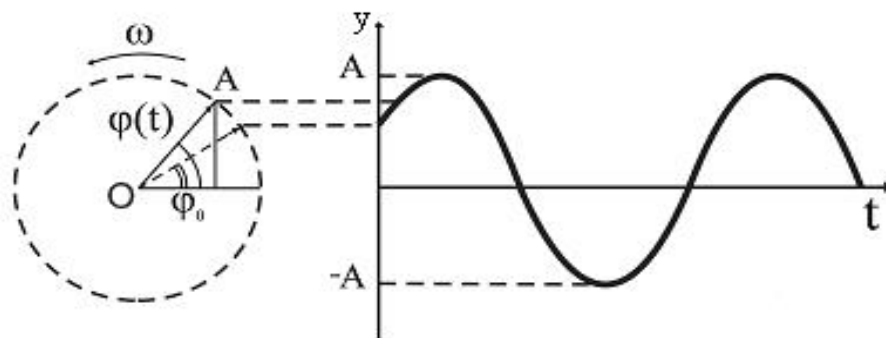


Рисунок 8.2. Представление гармонического колебания методом векторных диаграмм.

вектора, и с начальной фазой, равной углу, образуемому вектором \vec{A} с осью x в начальный момент времени. Проекция вектора \vec{A} на ось x совершает колебания по закону $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$.

8.2. Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты. Результирующее колебание x будет суммой колебаний x_1 и x_2 , которые определяются функциями:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (8.6)$$

Применим метод векторных диаграмм, построив по правилам сложения векторов результирующий вектор (рис. 8.3). Проекция его на ось x равна сумме проекций складываемых векторов:

$$x = x_1 + x_2.$$

Частота вращения результирующего вектора равна ω , амплитуда A и начальная фаза φ .

Из рисунка видно, что:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos[\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)] = \quad (8.7)$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (8.8)$$

Как мы видим, результат сложения двух колебаний существенно зависит от разности начальных фаз этих колебаний $\varphi_1 - \varphi_2$. Рассмотрим два важных случая:

а) $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ – колебания синфазные.

В этом случае амплитуды колебаний складываются, т.е. колебания усиливают друг друга (рис. 8.4):

$$A = A_1 + A_2.$$

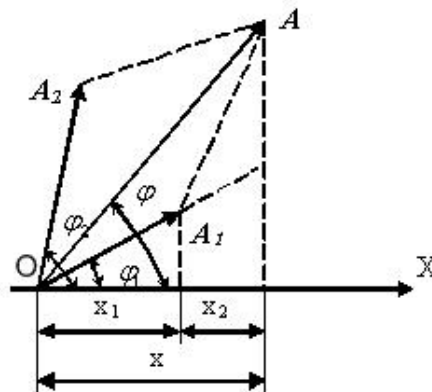


Рисунок 8.3. Векторное сложение двух гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты.

б) $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$ – колебания противофазные.

В этом случае амплитуды колебаний вычитаются, т.е. гасят друг друга (рис. 8.5):

$$A = |A_1 - A_2|.$$

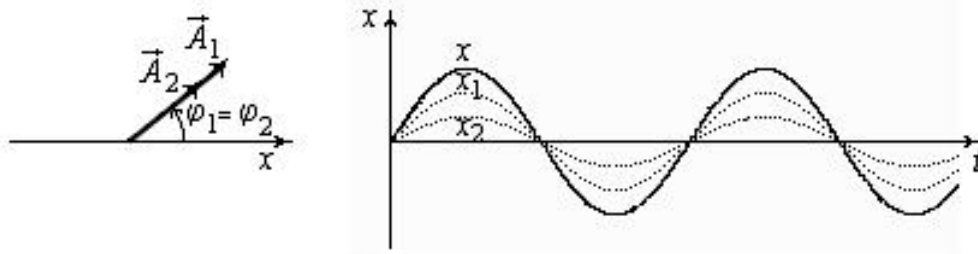


Рисунок 8.4. Сложение синфазных колебаний одного направления.

Если частоты колебаний x_1 и x_2 неодинаковы, векторы A_1 и A_2 будут вращаться с различной скоростью. В этом случае результирующий вектор A вращается с непостоянной скоростью, а его модуль изменяется в пределах от $|A_1 - A_2|$ до $A_1 + A_2$. Следовательно, результирующее колебание не будет гармоническим.

8.3. Биения

Для практики особый интерес представляет случай, когда два складываемых гармонических колебания одинакового направления мало отличаются по частоте. В результате сложения этих колебаний получаются

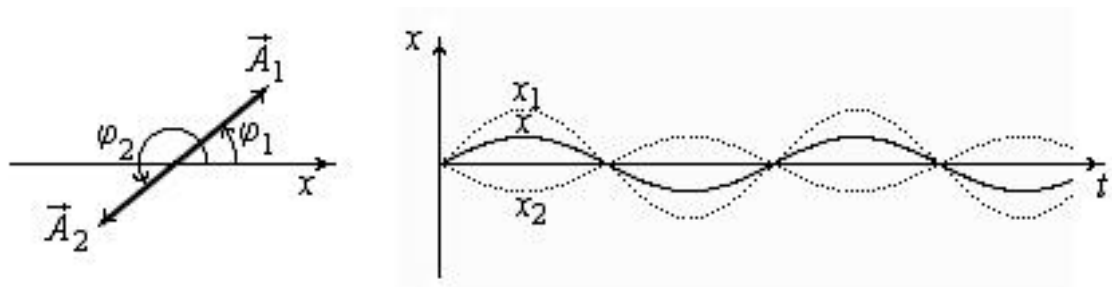


Рисунок 8.5. Сложение противофазных колебаний одного направления.

колебания с периодически изменяющейся амплитудой. Эти колебания

называются *биениями*. Они широко применяются на практике для сравнения измеряемой частоты с эталонной (при настройке музыкальных инструментов, для анализа звука и т.д.).

Пусть амплитуды складываемых колебаний равны, а частоты равны ω и $\omega + \Delta\omega$, причем $\Delta\omega \ll \omega$. Начальные фазы обоих колебаний примем равными нулю:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t), \quad (8.9)$$

$$x_2 = A_2 \cos[(\omega + \Delta\omega)t]. \quad (8.10)$$

Если сложить эти колебания, то получим:

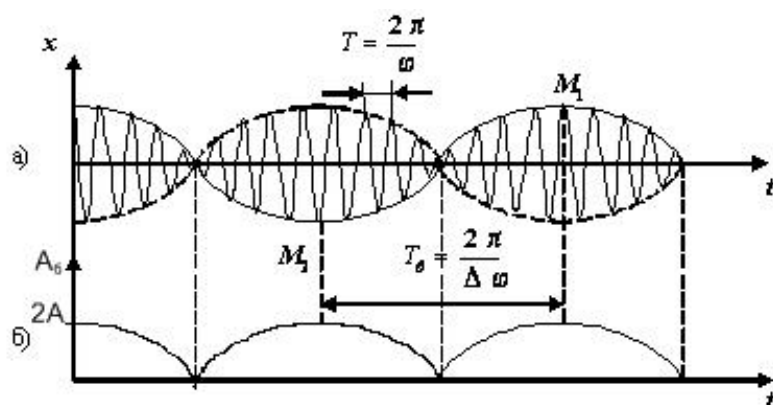
$$x = x_1 + x_2 = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) \cdot \cos(\omega t). \quad (8.11)$$

Первый множитель в формуле (8.11) изменяется гораздо медленнее, чем второй. Ввиду условия $\Delta\omega \ll \omega$ за время, пока $\cos(\omega t)$ совершает несколько полных колебаний, первый множитель почти не изменяется. Это дает основание рассматривать колебание (8.11) как гармоническое с частотой ω (рис. 8.6-а), амплитуда которого изменяется по следующему периодическому закону:

$$A_\delta = \left| 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) \right|. \quad (8.12)$$

Выражение для амплитуды представляет собой периодическую функцию с частотой, в два раза превышающей частоту гармонической функции, стоящей под знаком модуля, т.е. с частотой $\Delta\omega$ (рис. 8.6-б). Следовательно, частота пульсации амплитуды – ее называют *частотой биений* – равна разности частот складываемых колебаний $\Delta\omega$.

Периодом биения называется промежуток времени между двумя последовательными моментами времени, при которых амплитуда



результирующего колебания обращается в ноль:

$$T_б = \frac{2\pi}{\Delta\omega}. \quad (8.13)$$

Рисунок 8.6. График биений.

8.4. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу

Существуют системы, которые могут совершать колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Например, такие колебания может осуществлять двойной физической маятник, изображенный на рис. 8.7. Верхний маятник 2 и нижний маятник 3 совершают колебания во взаимно перпендикулярных плоскостях. Если между маятником 3 и металлической плитой 4 создать высокое напряжение от высоковольтного трансформатора 1 (5 кВ), то небольшое расстояние (3-5 мм), разделяющее маятник 3 и плиту 4, будет пробиваться электрическим разрядом. Наличие листа бумаги на плите 4 не создает помех для разряда, а на бумаге останутся следы. При возбуждении колебаний высоковольтный разряд, пробивая лист бумаги, фиксирует траекторию колебательного движения.

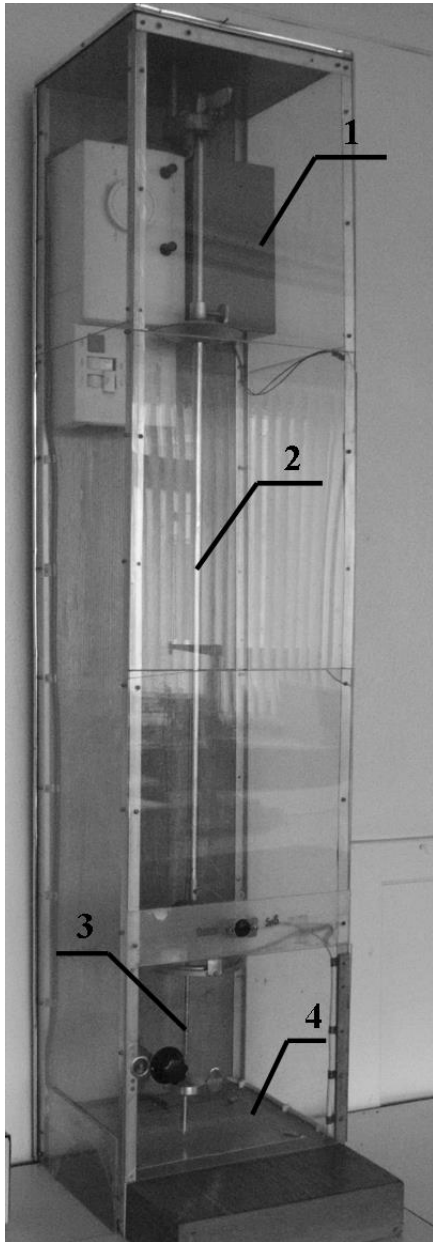


Рисунок 8.7. Стенд для получения фигуры Лиссажу при помощи двойного физического маятника:
1- блок питания на 5 кВ,
2- верхний физический маятник,
3- нижний физический маятник,
4- металлическая плита.

Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний можно также наблюдать на экране осциллографа (рис. 8.8), если на его отклоняющие пластины X подать одно гармонически изменяющееся напряжение U_x , а на пластины Y – второе гармонически изменяющееся напряжение U_y .

Замкнутые траектории, прочерчиваемые точкой, совершающей

одновременно два взаимно перпендикулярных колебания, называются *фигурами Лиссажу*. Форма этих кривых зависит от соотношения амплитуд, частот и разности фаз складываемых колебаний. Это обстоятельство используется в измерительной технике для исследования соотношений частот и разности фаз складываемых колебаний. Например, если частоты складываемых колебаний ω_x и ω_y относятся как два целых числа n и m :

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{n}{m}, \quad (8.14)$$

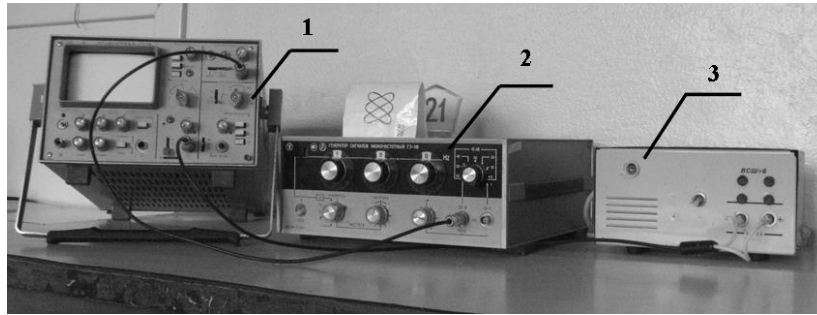


Рисунок 8.8. Экспериментальная установка для получения фигуры Лиссажу на экране осциллографа 1 при подсоединении к нему генераторов переменного тока 2 и 3.

то для определения соотношения ω_x/ω_y используется один из следующих методов:

1. Проводят через данную фигуру две произвольные взаимно перпендикулярные прямые EC и DP , параллельные осям OX и OY (рис. 8.9). Подсчитывают число точек пересечения фигуры и прямой DP . Это число равно величине n . Аналогично число пересечений фигуры и прямой EC равно величине m . В случае, когда прямая проходит через точку пересечения ветвей фигуры, при подсчете ее считают дважды. Соотношений частот складываемых колебаний равно отношению n/m .

2. Вписывают исследуемую фигуру Лиссажу в прямоугольник и подсчитывают количество точек соприкосновения фигуры и прямоугольника по горизонтали – m и вертикали – n (рис. 8.10). Соотношений частот

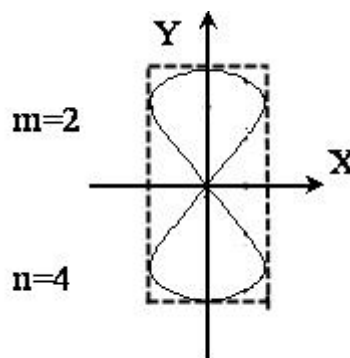


Рисунок 8.10. Определение соотношения частот взаимно перпендикулярных колебаний методом описанного прямоугольника.

складываемых колебаний равно отношению n/m .

Пусть материальная точка участвует в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях:

$$\begin{cases} x = a \cos(\omega_1 t), \\ y = b \cos(\omega_2 t + \varphi), \end{cases} \quad (8.15)$$

где φ – разность фаз этих колебаний. Выведем уравнение результирующего движения точки для нескольких простых случаев.

1. Вначале рассмотрим простейший случай, когда $\omega_1 = \omega_2 = \omega$:

$$\begin{cases} x = a \cos(\omega t), \\ y = b \cos(\omega t + \varphi), \end{cases} \quad (8.16)$$

Найти результат сложения, означает найти вид функции $y(x)$, т.е. найти траекторию движения материальной точки в плоскости (x, y) . Запишем систему уравнений (8.16) в виде:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = \cos(\omega t), \\ \frac{y}{b} = \cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t) \cdot \cos\varphi - \sin(\omega t) \cdot \sin\varphi, \end{cases} \quad (8.16 \text{ а})$$

С учетом первого уравнения, второе уравнение системы (8.16 а) преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{y}{b} &= \frac{x}{a} \cos\varphi - \sin\varphi \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \\ \frac{y}{b} - \frac{x}{a} \cos\varphi &= -\sin\varphi \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \end{aligned}$$

Возведем обе стороны этого уравнения в квадрат:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} \cos^2\varphi - \frac{2xy}{ab} \cos\varphi = \sin^2\varphi - \frac{x^2}{a^2} \sin^2\varphi,$$

и, окончательно упростив, получим вид функции $y(x)$:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} \cos\varphi = \sin^2\varphi. \quad (8.17)$$

Вид траектории $y(x)$ существенно зависит от разности фаз φ (рис. 8.11):

а) $\varphi=0$, $\left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\right)^2 = 0$, $y = \frac{b}{a}x$ – отрезок прямой линии,

б) $\varphi=\pm\pi$, $\left(\frac{y}{b} + \frac{x}{a}\right)^2 = 0$, $y = -\frac{b}{a}x$ – отрезок прямой линии,

в) $\varphi=\pm\pi/2$, $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$ – эллипс.

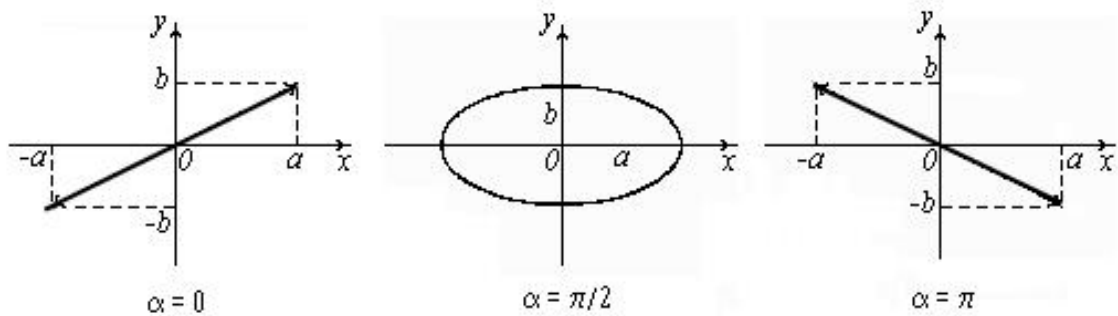


Рисунок 8.11. Фигуры Лиссажу для соотношения частот 1/1.

2. Рассмотрим случай, когда $\omega_1/\omega_2=1/2$ и $\varphi=0$:

$$\begin{cases} x = a\cos(\omega t), \\ y = b\cos(2\omega t). \end{cases} \quad (8.18)$$

Выразим во втором уравнении системы (8.18) $\cos(2\omega t)$ через $\cos(\omega t)$, а этот косинус – из первого уравнения:

$$\cos(2\omega t) = 2\cos^2(\omega t) - 1; \cos(\omega t) = x/a.$$

Тогда

$$y = b(2\cos^2(\omega t) - 1) = b\left(2\frac{x^2}{a^2} - 1\right) = \frac{2b}{a^2}x^2 - b. \quad (8.19)$$

Это уравнение параболы (рис. 8.12).

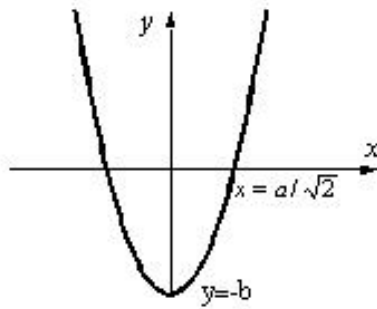


Рисунок 8.12. Фигура Лиссажу для соотношения частот 1/2.

На Рисунке 8.13 представлены и другие примеры фигур Лиссажу.

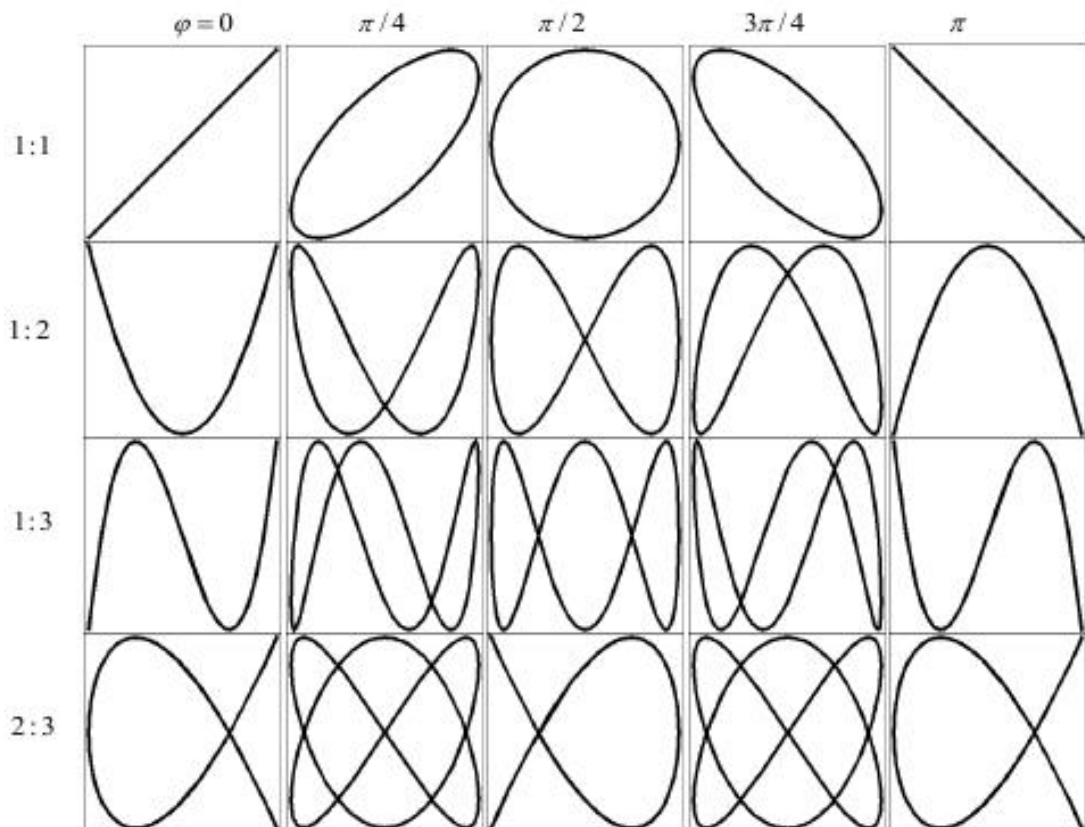


Рисунок 8.13. Примеры фигур Лиссажу для некоторых соотношений частот (указаны слева) и разностей фаз (указаны сверху) складываемых колебаний (предполагается, что их амплитуды одинаковы).

8.5. Оформление отчета

Отчет должен содержать:

Титульный лист.

Цель работы.

Перечень приборов и принадлежностей к работе.

Схему лабораторной установки.

Физическую модель.

Таблицу с рисунками фигур Лиссажу.

Лист-вкладыш с фигурой Лиссажу, прочерченной двойным физическим маятником.

Выводы.

8.6. Порядок выполнения работы

8.6.1. Получение фигур Лиссажу для различных разностей фаз складываемых электромагнитных колебаний.

1. Вывести аналитически зависимости $y=y(x)$ для двух фигур Лиссажу, задаваемых уравнениями:

$$\begin{cases} x = A_1 \cos(\omega_1 t) \\ y = A_2 \cos(\omega_2 t + \Delta\varphi) \end{cases}$$

Значения амплитуд A_1 , A_2 и частоты ω_1 задаются преподавателем, значение разности фаз $\Delta\varphi$ для первой фигуры Лиссажу равно нулю, для второй $\pi/2$.
Две получившиеся траектории занести в соответствующие клетки таблицы 8.1:

Таблица 8.1 Вид фигуры Лиссажу на экране осциллографа при различной разности фаз $\Delta\varphi$.

$\Delta\varphi=0^\circ$	$\Delta\varphi=45^\circ$	$\Delta\varphi=90^\circ$	$\Delta\varphi=135^\circ$	$\Delta\varphi=180^\circ$
$\Delta\varphi=225^\circ$	$\Delta\varphi=270^\circ$	$\Delta\varphi=315^\circ$	$\Delta\varphi=360^\circ$	

2. Включить генератор, осциллограф и блок питания.
3. Установить на генераторе частоту ω_1 (частота второго колебания ω_2 , поступающего с блока питания, остается неизменной и равной 50 Гц).
4. Наблюдая на экране осциллографа последовательное изменение картины колебаний, зарисовать последовательность фигур Лиссажу в таблицу 8.1. Остановить (зафиксировать) полученную фигуру можно более тщательной подстройкой частоты генератора.

8.6.2. Определение соотношения частот складываемых колебаний двойного физического маятника

1. Открыть дверцу на передней панели установки и укрепить на металлической плите лист бумаги.
2. Одной рукой отклонить верхний маятник на небольшой угол и одновременно второй рукой отклонить нижний маятник. Осторожно отпустить оба маятника (конец нижнего маятника при этом должен выписывать фигуру Лиссажу, которая должна помещаться на лист бумаги).
3. Плотно закрыть дверцу на зажим и включить установку с помощью тумблеров «Вкл». Между концом нижнего маятника и стальной плитой должен возникнуть разряд.
4. Отключить установку (тумблеры «Вкл» вернуть в исходное состояние) после того как верхний маятник совершит одно полное колебание.
5. Открыть дверцу и достать лист бумаги.
6. Обвести карандашом полученную траекторию, образованную на бумаге следами от разряда.
7. Используя метод пересекающихся прямых, определить соотношение частот складываемых колебаний двойного физического маятника.

9. МЕХАНИКА И ТЕРМОДИНАМИКА ЗВУКА В ГАЗОВОЙ СРЕДЕ

Цель работы.

1. Изучить механику и термодинамику звука в газе.
2. Определить методом стоячей волны скорость звука в воздухе.
3. Рассчитать показатель политропы и по его значению определить характер термодинамического процесса в газе при воздействии на него звуковой волны.

Приборы и принадлежности.

1. Осциллограф.
2. Звуковой генератор.
3. Измерительный стенд.

Список литературы.

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики, т. 1, М.: Наука, 1989.
2. Савельев И.В. Курс общей физики, т. 1, М.: Наука, 1970.
3. Головейко А.Г., Новикова Г.И. Механика и термодинамика звука в газовой среде. Методические указания к лабораторной работе.– Издательский центр кафедры технической физики, Минск, 2000. – 34 с.

Вопросы к зачету.

1. Что такое волна, волновой фронт, волновая поверхность, длина волны? Виды волн. Какие волны называются гармоническими?
2. Что представляет собой звуковая волна в газе?
3. Получите уравнение бегущей волны, определите физические величины, входящие в уравнение.

4. Какими величинами характеризуется распространение звуковой волны в воздухе? Запишите уравнения волн, соответствующих данным величинам.
5. Что такое стоячая волна? Получите уравнение стоячей волны и рассчитайте координаты узлов и пучностей.
6. Чем отличаются стоячая и бегущая волны?
7. Как распределены узлы и пучности стоячих волн смещения, колебательной скорости и избыточного давления в столбе воздуха?
8. Сформулируйте условия образования узлов и пучностей на границе отражения волн.
9. Что такое показатель политропы? Запишите формулу для определения скорости звука в воздухе.
10. Какой термодинамический процесс происходит в газе при распространении звуковой волны?
11. Каким способом определяется длина стоячей волны в данной работе?

9.1. Волна. Поперечные и продольные механические волны. Звук

Механической волной или *волновым процессом* называется процесс распространения колебаний в упругой среде. При распространении волны частицы среды не движутся вместе с волной, а совершают колебания около своих положений равновесия. Вместе с волной от частицы к частице среды передается колебательное движение и энергия. Поэтому основным свойством всех волн, независимо от их природы, является перенос энергии без переноса вещества.

Упругая волна называется *продольной*, если частицы среды колеблются в направлении распространения волны. Продольные волны связаны с объемной деформацией упругой среды и поэтому могут распространяться в любой среде – жидкой, твердой, газообразной.

Упругая волна называется *поперечной*, если частицы среды совершают колебания в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны. Поперечные волны связаны с деформацией сдвига упругой среды и поэтому могут возникать только в твердых телах.

Волновым фронтом называется геометрическое место точек, до которого в данный момент времени дошло колебательное движение. *Волновой поверхностью* называется геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе. Через каждую точку среды можно провести только одну волновую поверхность. Множеству различных значений фазы колебаний соответствует семейство волновых поверхностей. Волна называется *плоской*, если ее волновые поверхности представляют совокупность плоскостей, параллельных друг другу.

Звуковыми волнами называются упругие волны малой интенсивности, т.е. слабые механические возмущения, распространяющиеся в упругой среде. Звуковые волны, воздействуя на органы слуха человека, способны вызывать звуковые ощущения, если частоты соответствующих им колебаний лежат в пределах от 16 Гц до 20 кГц – слышимые звуки. Упругие волны с частотами меньшими, чем 16 Гц называют инфразвуком, а с частотами большими, чем 20 кГц - ультразвуком.

Звуковая волны в газе является *продольной* и представляет собой последовательность чередующихся областей *сжатия* и *разрежения* газа. При распространении звуковой волны в газе изменяются параметры термодинамического состояния. Это значит, что волна в газовой среде связана с *механическими* и *термодинамическими* явлениями одновременно.

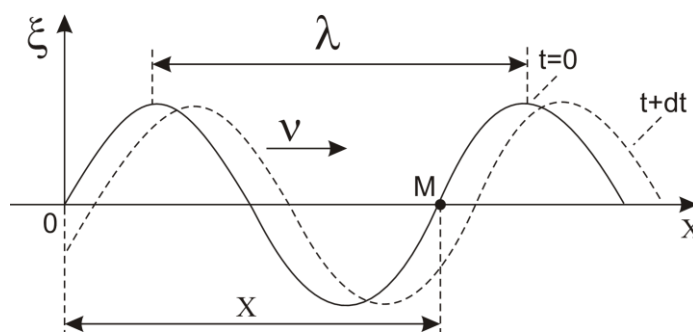
9.2. Уравнение бегущей волны. Распространение продольных волн в газе

Уравнением волны называется зависимость от координат и времени скалярных или векторных величин, характеризующих колебания среды при прохождении в ней рассматриваемой волны. Например, для поперечных волн

такой величиной может служить вектор смещения частицы среды из положения равновесия или три его проекции на оси координат.

Для вывода уравнения бегущей волны рассмотрим плоскую поперечную синусоидальную волну, распространяющуюся вдоль положительного направления оси OX . Упругая волна называется *синусоидальной* (гармонической), если соответствующие ей колебания частиц среды являются гармоническими.

Если колебания точек среды, лежащих в плоскости $x=0$ (рис. 9.1) описываются функцией $\xi(0,t)=A\sin\omega t$, то точка среды M будет колебаться по



тому же закону, но ее колебания будут отставать от колебаний в точке O на время $\tau = x/v$, где v – скорость распространения волны. И тогда

Рисунок 9.1. Смещение частиц в момент времени $t = 0$ и $t + dt$.

уравнение колебаний частиц, лежащих в плоскости X , будет иметь вид:

$$\xi(x, t) = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right],$$

где $\xi(x, t)$ – смещение частицы с координатой x от положения равновесия в момент времени t , A – амплитуда смещения, ω – циклическая частота.

Это уравнение *плоской бегущей волны*. Волна называется бегущей, так как «гребни» волны перемещаются в направлении распространения волны со скоростью v . Вид волны через время dt показан на рис. 9.1.

Для характеристики синусоидальной волны используется *волновое число*:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}, \quad (9.1)$$

где T – период колебаний, λ – *длина волны* (длиной волны называется расстояние, на которое волна распространяется за период, $\lambda = vT$).

С учетом (9.1) уравнение волны примет вид:

$$\xi(x, t) = A \sin \left[\omega t - \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{x}{v} \right] = A \sin[\omega t - kx]. \quad (9.2)$$

Скорость v распространения синусоидальной волны называется *фазовой скоростью*. Она равна скорости перемещения в пространстве точек поверхности, соответствующей любому фиксированному значению фазы, т.е. скорости волновой поверхности.

Распространение продольных волн рассмотрим на примере звуковой волны в столбе воздуха. Пусть имеется длинная труба, наполненная воздухом (рис.9.2). С левого конца в нее вставлена плотно прилегающая к стенкам мембрана M , совершающая гармонические колебания со звуковой частотой. Колеблущаяся мембрана создает попеременно сжатие и разрежение в соседствующей с ней области воздуха, благодаря чему образуется продольная волна. Как и в случае поперечных волн, каждый участок среды, по которому идет продольная волна, совершает очень небольшие по размаху колебания, в то время как сама волна может распространяться на значительные расстояния. К продольной волне, также как и к поперечной, применимы понятия длины волны, частоты и скорости.

Будем характеризовать звуковую волну в газе смещением частиц ξ , их колебательной скоростью u и избыточным давлением Δp . Для звуковых волн эти отклонения от равновесных значений всегда малы. Так, избыточное давление Δp , связанное с волной, намного меньше статического давления газа p_0 и составляет лишь около одной миллионной атмосферного давления. Эти величины подвергаются гармоническим колебаниям, и для каждой из них соответствует своя волна. Эти волны определяются уравнениями:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_a \sin[\omega t - kx], \\ u &= u_a \cos[\omega t - kx], \\ \Delta p &= \Delta p_a \cos[\omega t - kx], \Delta p_a \ll \Delta p_0,\end{aligned}\tag{9.3}$$

где ξ_a , u_a и Δp – амплитудные значения колеблющихся величин. Колебательная скорость и избыточное давление получены из уравнения смещения путем дифференцирования по t и x :

$$u = \frac{d\xi}{dt}, \Delta p = -B \frac{d\xi}{dx} \text{ (см. формулу (10.22))}\tag{9.4}$$

где B – модуль объемной упругости.

Как видно из рис. 9.2, в области сжатия волны (там, где молекулы

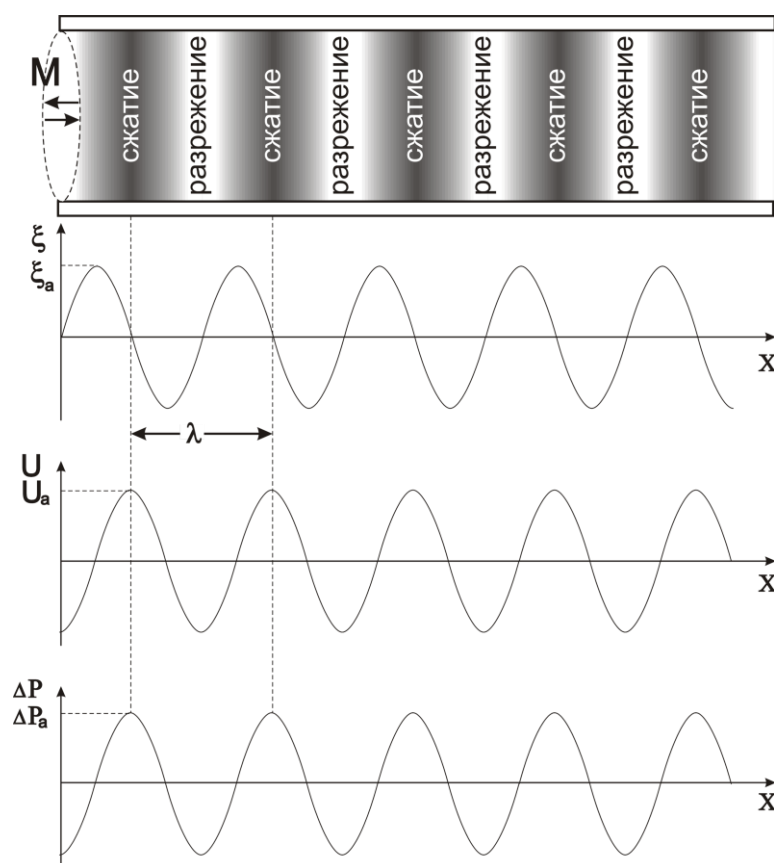


Рисунок 9.2. Графики зависимости смещения, колебательной скорости частиц и избыточного давления от координаты для гармонической звуковой волны.

находятся ближе друг к другу) давление выше нормального, тогда как в области разрежения оно ниже нормального. Волна смещения отличается по фазе от волны давления на четверть длины волны; там, где давление достигает максимума или минимума, смещение равно нулю, а где изменение давления равно нулю, смещение максимально или минимально.

9.3. Интерференция волн. Стоячие волны. Образование стоячих звуковых волн в газе

Если в среде распространяется одновременно несколько волн, то смещение частиц среды от положения равновесия равно сумме смещений, вызываемой каждой из волн по отдельности. Это вытекающее из опыта утверждение называется *принципом суперпозиции (наложения) волн*.

В случае, когда колебания, обусловленные отдельными волнами в каждой из точек среды, обладают одинаковой частотой и постоянной разностью фаз, волны называются *когерентными*. При сложении когерентных волн возникает явление интерференции, заключающееся в том, что колебания в одних точках усиливают, а в других точках ослабляют друг друга. Очень важный случай интерференции наблюдается при наложении двух встречных плоских волн с одинаковой амплитудой. Возникающий в результате колебательный процесс называется *стоячей волной*.

Стоячая волна – это волна, которая образуется при наложении двух волн с одинаковой амплитудой и частотой, когда волны движутся навстречу друг другу. Практически стоячие волны возникают при отражении волн от преграды. Падающая на преграду волна и бегущая ей навстречу отраженная волна, налагаясь друг на друга, дают стоячую волну.

Запишем уравнения двух плоских волн, распространяющихся вдоль оси x в противоположных направлениях:

$$\xi_1 = A \sin[\omega t - kx],$$

$$\xi_2 = A \sin[\omega t + kx].$$

Применяя принцип суперпозиции и преобразовав результат по формуле для суммы синусов, получим:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cdot \cos kx \cdot \sin \omega t, \quad (9.4)$$

– уравнение стоячей волны.

Заменяв волновое число k его выражением $k=2\pi/\lambda$, получим уравнение стоячей волны, удобное для анализа колебаний частиц в стоячей волне:

$$\xi = (2A \cdot \cos(2\pi \frac{x}{\lambda})) \sin \omega t.$$

Из этого уравнения видно, что в каждой точке стоячей волны происходят колебания той же частоты, что и у встречных волн, причем амплитуда колебаний зависит от x :

$$A(x) = 2A \cos(2\pi \frac{x}{\lambda}).$$

В точках, координаты которых удовлетворяют условию:

$$\cos(2\pi \frac{x}{\lambda}) = \pm 1 \Rightarrow 2\pi \frac{x}{\lambda} = 2n \frac{\pi}{2} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

амплитуда колебаний достигает максимального значения. Эти точки называются *пучностями* стоячей волны. Значения координаты n -ой пучности равны:

$$x_{\text{пучн}} = \pm 2n \frac{\lambda}{4} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

В точках, координаты которых удовлетворяют условию:

$$\cos(2\pi \frac{x}{\lambda}) = 0 \Rightarrow 2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm(2n + 1) \frac{\pi}{2} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

амплитуда колебаний обращается в нуль. Эти точки называются *узлами* стоячей волны. Точки среды, находящиеся в узлах, колебаний не совершают. Координаты n -ого узла имеют значения:

$$x_{\text{узел}} = \pm(2n + 1) \frac{\lambda}{4} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Из этих формул следует, что расстояние между соседними пучностями, так же как и расстояние между соседними узлами, равно $\lambda/2$, что равно *длине стоячей волны*: $\lambda_{\text{ст}} = \lambda/2$. Пучности и узлы сдвинуты друг относительно друга на четверть длины волны.

На рис. 9.3 представлен график смещения точек от положения равновесия для момента времени t (сплошная кривая) и график отклонений точек для момента времени $t+T/2$ (пунктирная кривая).

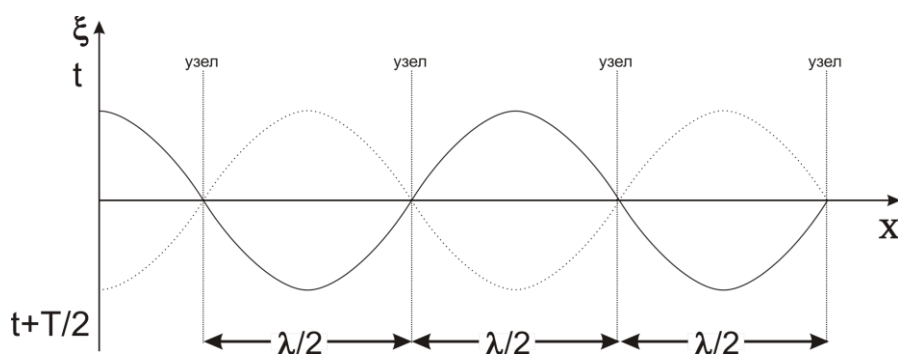


Рисунок 9.3. Стоячая волна в моменты времени t и $t+T/2$.

Как видно из рисунка точки, лежащие по разные стороны от узла, колеблются в противофазе. Все точки, заключенные между двумя соседними узлами, колеблются синфазно (т.е. в одинаковой фазе). Таким образом, отличие стоячей волны от бегущей в том, что между соседними узлами стоячей волны все точки среды колеблются в одинаковой фазе, но с разными амплитудами, тогда как в бегущей волне, наоборот, с запаздыванием по фазе, но с одинаковой амплитудой.

Стоячая волна, в отличие от бегущей, не переносит энергию. Дважды за период происходит превращение энергии стоячей волны то полностью в

потенциальную энергию, сосредоточенную, в основном, вблизи узлов волны, то полностью в кинетическую энергию, сосредоточенную, в основном, вблизи пучностей волны. В результате происходит переход энергии от каждого узла к соседним пучностям и обратно. Средний по времени поток энергии в любом сечении волны равен нулю.

Рассмотрим образование стоячих звуковых волн в столбе воздуха. Если открытый конец трубы закрыть поршнем, то в ней появится отраженная волна. Бегущая и отраженная волны накладываются друг на друга, и при определенных условиях (*длина столба воздуха должна быть кратна $\lambda/4$*) в столбе воздуха возникает стоячая волна с четко выраженными узлами и пучностями, как это показано на рис. 9.4.

Получим уравнения стоячих волн смещения, колебательной скорости и избыточного давления. Уравнение бегущей волны имеет вид:

$$\xi_1 = \xi_a \sin[\omega t - kx].$$

Уравнение отраженной волны имеет вид (с учетом *изменения фазы на противоположную при отражении волны от более плотной среды*):

$$\xi_2 = -\xi_a \sin[\omega t + kx].$$

Будет ли на границе отражения узел или пучность, зависит от соотношения плотностей сред. Если среда, от которой происходит отражение, менее плотная, то в месте отражения возникает пучность, если более плотная – узел. Образование узла связано с тем, что волна, отражаясь от более плотной среды, меняет фазу на противоположную и у границы происходит сложение колебаний с противоположными фазами, в результате чего получается узел. Если же волна отражается от менее плотной среды, то изменения фазы не происходит и у границы колебания складываются с одинаковыми фазами – образуется пучность.

Уравнение результирующей волны смещений ξ определяется принципом суперпозиции:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_1 + \xi_2 = \xi_a(\sin[\omega t - kx] - \sin[\omega t + kx]) = \\ &= 2\xi_a \cdot \operatorname{sink}x \cdot \cos\omega t = A_\xi(x)\cos\omega t.\end{aligned}\quad (9.5)$$

Это уравнение стоячей волны для колебательных смещений ξ молекул газа. Уравнения стоячих волн для колебательной скорости молекул и избыточного давления получаются исходя из уравнений (9.4):

$$\begin{aligned}u &= -2u_a \cdot \operatorname{sink}x \cdot \sin\omega t = A_u(x)\sin\omega t, \\ \Delta p &= -2\Delta p_a \cdot \operatorname{cosk}x \cdot \cos\omega t = A_p(x)\cos\omega t,\end{aligned}\quad (9.6)$$

где периодические функции:

$$\begin{aligned}A_\xi(x) &= 2\xi_a \operatorname{sink}x, \\ A_u(x) &= -2u_a \operatorname{sink}x, \\ A_p(x) &= -2\Delta p_a \operatorname{cosk}x,\end{aligned}\quad (9.7)$$

– выражают амплитуды стоячих волн.

Распределение амплитуд, как видно из (9.7), повторяется по оси x по гармоническому закону. В некоторых сечениях столба воздуха амплитуды принимают нулевые значения (*узлы*), а в других – максимальные значения (*пучности*).

В стоячих волнах величин ξ и u координаты узлов и пучностей совпадают, тогда как узлы и пучности давления Δp смещены по отношению к ним на $\lambda/4$, что можно видеть на рис. 9.4. Т.е., в пучностях давления оказываются узлы смещения и колебательной скорости. Это значит, что в пучностях давления отсутствует колебательное движение газовой среды. На границе с поршнем для величин ξ и u получается узел, а для Δp – пучность. Причина в том, что падающая и отраженная волны действуют на

пограничный слой газа по отношению к величинам ξ и u в противофазе и дают нулевой результат для каждой из них, а по отношению к Δp – в одной фазе и дают максимальный результат.

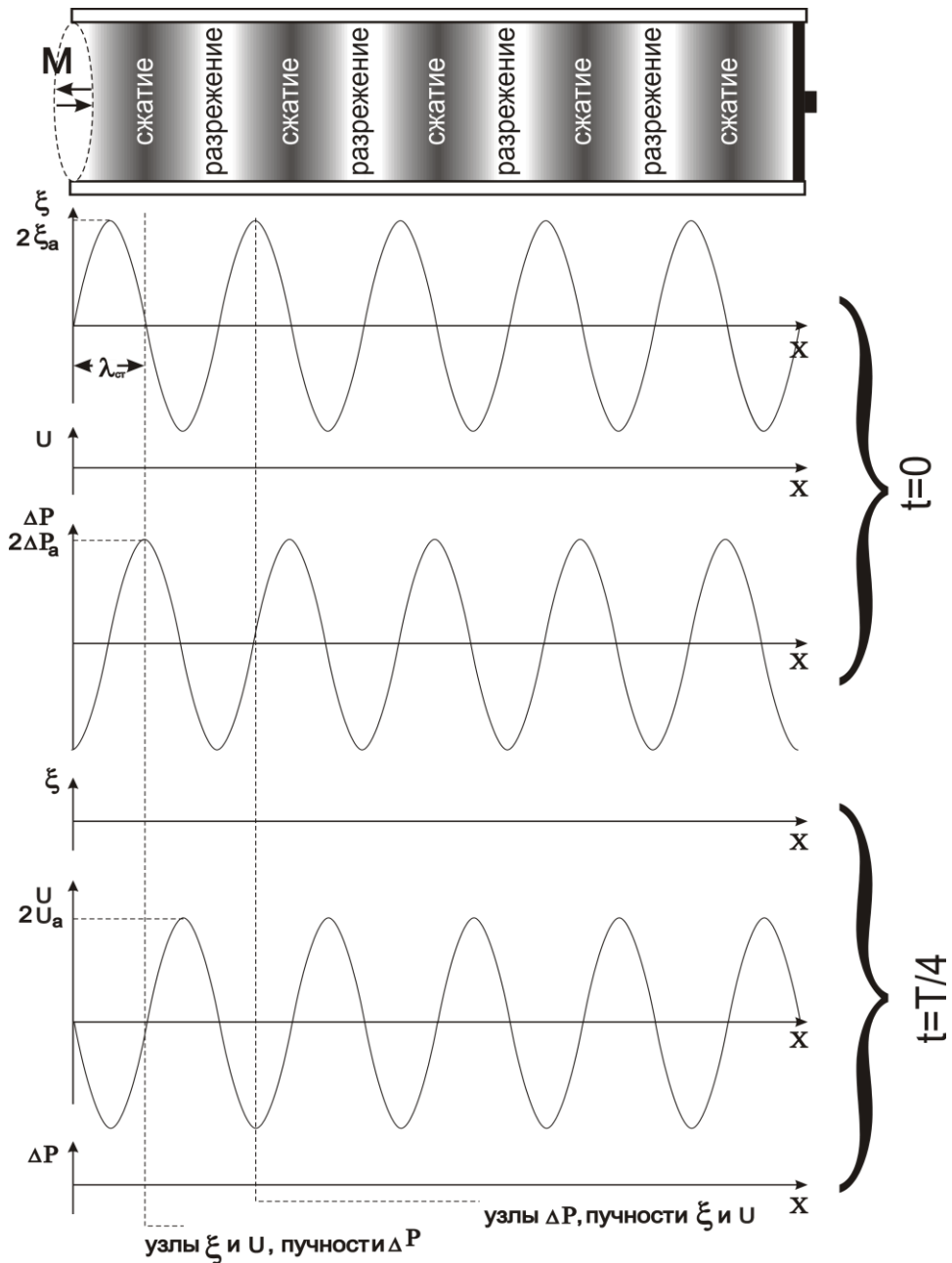


Рисунок 9.4. Стоячие волны смещения, колебательной скорости и избыточного давления через четверть периода.

Расстояние между соседними узлами (или пучностями) равно *длине стоячей волны* и составляет половину длины бегущей волны λ :

$$\lambda_{\text{ст}} = x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda}{2}, \quad \lambda = 2\lambda_{\text{ст}}. \quad (9.8)$$

9.4. Скорость распространения звука в газах и ее связь с термодинамическими параметрами среды

При распространении волны в газе происходит смещение отдельных локальных частей газа, которые, в свою очередь, подвергаясь сжатию (или разрежению), изменяют свою температуру и другие параметры термодинамического состояния. Это значит, что волна в газовой среде связана как с механическими, так и с термодинамическими явлениями одновременно. Воздух в широком интервале давлений и температур можно считать идеальным газом. Какой же термодинамический процесс возбуждает звуковая волна в воздухе? Можно предположить, что в столбе газа происходит политропический процесс, как наиболее обобщенный из всех процессов. Уравнение, описывающее данный процесс, имеет вид:

$$PV^n = \text{const}, \quad (9.9)$$

где

$$n = \frac{C_p - C}{C_v - C}, \quad (9.10)$$

называется показателем политропы, где:

C молярная теплоемкость

C_v молярная теплоемкость изохорического процесса

C_p молярная теплоемкость изобарического процесса

Молярная теплоемкость газа C в ходе политропического процесса является постоянной величиной, однако ее значения могут быть весьма различными в зависимости от того, как конкретно этот процесс реализуется. В частности, возможны значения $C=0$, $C=\pm\infty$, $C=C_V$, $C=C_P$ для адиабатического, изотермического, изохорического и изобарического процессов, соответственно. Для перечисленных выше изо процессов, как следует из выражения (9.10), n принимает значения:

$$\begin{aligned} n &= \pm\infty \text{ при } V = \text{const} (C = C_V = \frac{i}{2}R), & (9.10a) \\ n &= 0 \text{ при } P = \text{const} (C = C_P = \frac{i+2}{2}R), \\ n &= 1 \text{ при } T = \text{const} (C = \pm\infty), \\ n &= \gamma \text{ при } dQ = 0 (C = 0, \gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{i}), \end{aligned}$$

где i – число степеней свободы молекулы газа, γ – показатель адиабаты, R – газовая постоянная. Для одноатомной молекулы $i=3$, для двухатомной – $i=5$, для трехатомной – $i=6$. В данной работе газовой средой является воздух, основной состав которого определяется двухатомными молекулами кислорода и азота (O_2 , N_2). Поэтому для сухого воздуха $\gamma=1,4$. Увлажненный воздух содержит молекулы воды, для которых $i=6$, по этой причине значения γ для такого воздуха будет несколько отличным от значения 1,4.

Таким образом, определив значение показателя политропы, можно определить характер термодинамического процесса.

Установим связь между скоростью звука и показателем политропы. На основе анализа механических явлений, которые в данной работе не рассматриваются, скорость волны в газе равна:

$$v = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}, \quad (9.11)$$

где ρ – плотность среды.

Прологарифмировав и продифференцировав уравнение (9.9), получим:

$$n \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0. \quad (9.12)$$

Для $m = const$ можно записать:

$$\rho V = m \Rightarrow \rho dV + V d\rho = 0 \Rightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho}. \quad (9.13)$$

Как известно, объем, давление и абсолютная температура идеальных газов связаны уравнением Менделеева–Клапейрона:

$$PV = \frac{m}{M} RT \Rightarrow \frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M}. \quad (9.14)$$

Подставив (9.13) и (9.14) в (9.12), получим:

$$\frac{dP}{d\rho} = \frac{nRT}{M}.$$

Следовательно,

$$v = \sqrt{\frac{nRT}{M}}. \quad (9.15)$$

Полученная формула для скорости волны универсальна, она не связана с каким либо конкретным термодинамическим процессом. По этой формуле можно решать две противоположные задачи. Если показатель политропы n известен, то определяется скорость волны, и, наоборот, если установлена скорость волны, то находится показатель политропы, и по нему определяется конкретный вид термодинамического процесса. Именно так и ставится задача в данной работе.

Очевидно, изохорический и изобарический процессы должны быть исключены, так как при распространении волны происходит изменение объема и давления локальных областей газа. Изотермический процесс, как считал Ньютон, вполне реален, но тогда, согласно (9.10а),

$$v = \sqrt{\frac{RT}{M}}.$$

Расчеты для воздуха по этой формуле дают значения скорости звука 280 м/с вместо 330 м/с. Приведенное расхождение известно в литературе как ошибка Ньютона. Парадокс ошибки в том, что звуковая волна практически не нагревает воздух, и, тем не менее, процесс нельзя считать изотермическим. При адиабатическом процессе, когда $n = \gamma$,

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}.$$

Эта формула была получена Лапласом. Расчет по этой формуле дает для скорости звука в воздухе значение 332 м/с, что фактически соответствует действительности. Звуковая волна состоит из следующих друг за другом сжатий и разрежений газа. Над сжатыми областями производится внешняя работа, которая идет на повышение температуры. Разреженные области сами совершают внешнюю работу и благодаря этому охлаждаются. Так как сжатия и разрежения совершаются очень быстро, то температуры между ними не успевают выравняться: сжатые области всегда теплее разреженных. Наличие этой разности температур повышает перепад давления между сжатиями и разрежениями и ведет к увеличению скорости звука в газах. Это обстоятельство и не было учтено формулой Ньютона.

В данной работе скорость волны определяется экспериментально. По координатам узлов и пучностей рассчитывается длина волны, и скорость находится по формуле:

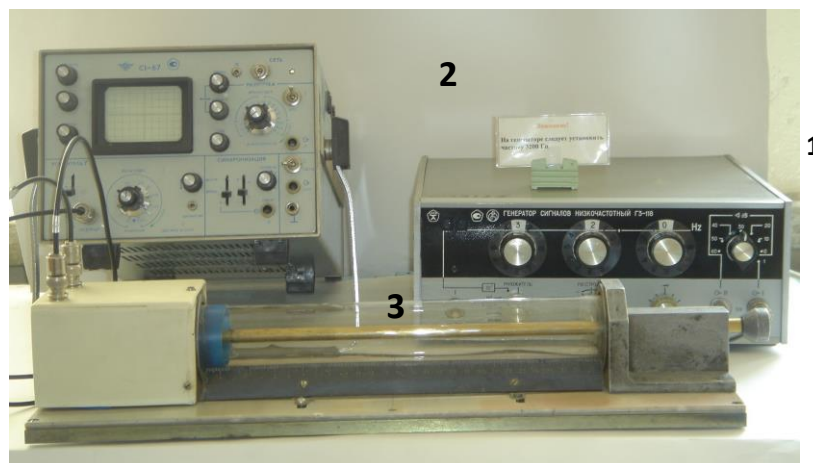


Рисунок 9.5. Экспериментальная установка (1 – генератор колебаний; 2 – осциллограф; 3 – перемещаемый поршень).

$$v = \lambda\nu = 2\lambda_{\text{ст}}\nu. \quad (9.16)$$

где ν – частота звукового генератора.

Тогда и показатель политропы определяется данными эксперимента:

$$n = \nu^2 \frac{M}{RT}. \quad (9.17)$$

9.5. Методика эксперимента

Экспериментальная установка представлена на рис. 9.5. У открытого конца стеклянной трубы установлена мембрана **М**, а в самой трубе на некотором расстоянии от её конца установлен перемещаемый поршень. Генератор колебаний задает мембране определенную звуковую частоту. При вибрации мембраны возбуждается плоская бегущая волна, которая со скоростью звука распространяется от открытого конца трубы до поршня, отражается от него и с той же скоростью распространяется в обратном направлении к открытому концу трубы, где расположен индикатор **И**.

Длина воздушного столба в трубе задается положением перемещаемого в ней поршня. Лишь при избранных положениях поршня в воздушном столбе образуется стоячая волна, в том числе стоячая волна смещений, на которой

основан эксперимент. В случае пучности на краю трубы индикатор колебаний передает на осциллограф максимальный сигнал, а в случае узла — минимальный сигнал с соответствующим изображением колебательного процесса на экране осциллографа. Перемещая поршень и наблюдая за экраном осциллографа, можно определить по шкале положения поршня l_n и h_n , которые соответствуют узлам и пучностям стоячей волны (рис. 9.6).

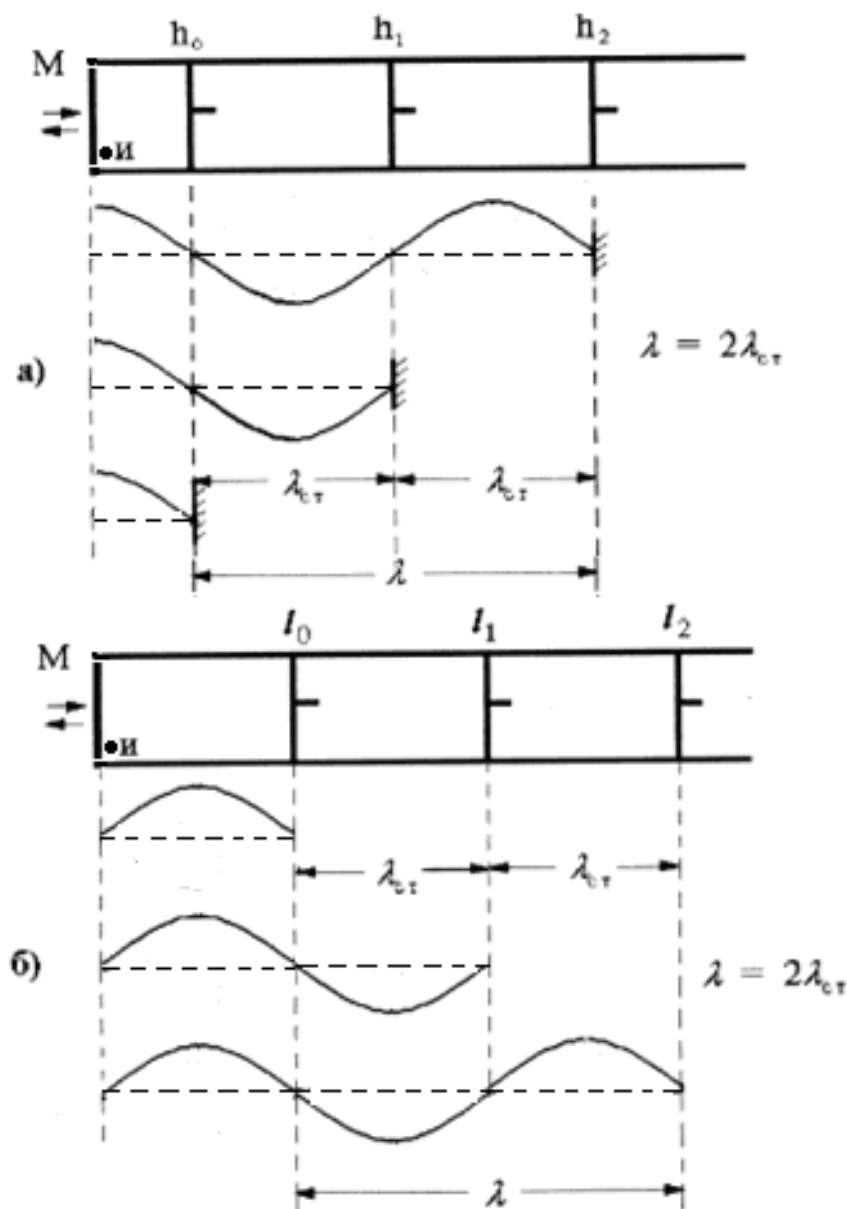


Рисунок 9.6. При перемещении поршня у открытого края трубы будет получаться либо узел, либо пучность стоячей волны смещений (И – индикатор, М – мембрана).

Расстояние между соседними положениями поршня, при которых в области мембраны будут наблюдаться пучности смещений и будет равно длине стоячей волны $\lambda_{ст}$. Аналогично, расстояние между соседними положениями поршня, при которых в области мембраны будут наблюдаться узлы смещений, также будет равно длине стоячей волны.

9.6. Порядок выполнения работы

1. Включить генератор и осциллограф.
2. Установить на генераторе частоту, которая указана на стенде.
3. Установить подвижный поршень в крайнее левое положение.

Перемещая поршень вдоль трубы вправо, определить координаты тех положений поршня, при которых наблюдаются минимумы интенсивности (узлы стоячей волны) l_1, l_2, \dots, l_n , а также координаты тех положений, при которых наблюдаются максимумы интенсивности (пучности стоячей волны) h_1, h_2, \dots, h_n . Координату каждого узла и пучности измерять не менее трех раз. Данные занести в таблицы 9.1 и 9.2. Минимум и максимум интенсивности определяются по минимуму и максимуму амплитуды сигнала на экране осциллографа.

4. Найти средние значения положений узлов и пучностей: \bar{l} и \bar{h} .

Таблица 9.1. Координаты узлов

Номер узла № п/п	$l_1, 10^{-3}$ м	$l_2, 10^{-3}$ м	$l_3, 10^{-3}$ м	$l_4, 10^{-3}$ м	$l_5, 10^{-3}$ м
1					
2					
3					
Среднее значение	$\bar{l}_1=$	$\bar{l}_2=$	$\bar{l}_3=$	$\bar{l}_4=$	$\bar{l}_5=$

Таблица 9.2. Координаты пучностей

Номер узла № п/п	$h_1, 10^{-3}$ м	$h_2, 10^{-3}$ м	$h_3, 10^{-3}$ м	$h_4, 10^{-3}$ м	$h_5, 10^{-3}$ м
1					
2					
3					
Среднее значение	$\bar{h}_1=$	$\bar{h}_2=$	$\bar{h}_3=$	$\bar{h}_4=$	$\bar{h}_5=$

5. Определить значения длины стоячей волны, как разность между координатами соседних узлов $\lambda_{ст} = \bar{l}_n - \bar{l}_{n-1}$ и соседних пучностей $\lambda_{ст} = \bar{h}_n - \bar{h}_{n-1}$. Данные занести в таблицу 9.3.

Таблица 9.3.

$x_{п/п}$	$\lambda_{ст}, 10^{-3}$ м	$\Delta\lambda_{ст}, 10^{-3}$ м
1		
2		
3		
...		
n		
Среднее значение	$\lambda_{ст, ср} =$	$\Delta\lambda_{ст, ср} =$

6. Найти среднее значение длины стоячей волны $\lambda_{ст, ср}$ и среднее значение отклонений от среднего $\Delta\lambda_{ст, ср}$. Рассчитать полную абсолютную погрешность определения длины стоячей волны:

$$\Delta\lambda_{ст} = \sqrt{(\Delta\lambda_{ст, ср})^2 + (\Delta L_{пр})^2}, \text{ где } \Delta L_{пр} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

7. Определить скорость звука в воздухе v и значение показателя политропы n :

$$v = 2\lambda_{\text{ст,ср}}\nu, n=4\lambda_{\text{ст,ср}}^2\nu^2 \frac{M}{RT}.$$

8. Определить относительные и абсолютные погрешности величин λ , ν и n :

$$\varepsilon_{\lambda} = \frac{\Delta\lambda_{\text{ст,ср}}}{\lambda_{\text{ст,ср}}}; \quad \varepsilon_{\nu} = \frac{\Delta\lambda_{\text{ст,ср}}}{\lambda_{\text{ст,ср}}} + \frac{\Delta\nu}{\nu}; \quad \Delta\nu = \nu\varepsilon_{\nu}.$$

$$\varepsilon_n = 2\frac{\Delta\lambda_{\text{ст,ср}}}{\lambda_{\text{ст,ср}}} + 2\frac{\Delta\nu}{\nu} + \frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta T}{T}; \quad \Delta n = n\varepsilon_n.$$

9. По значению показателя политропы n определить характер термодинамического процесса в газе при воздействии на него звуковой волны.

10. Записать значения λ , ν и n с учетом погрешностей и сделать выводы.

Примечание: ниже приведены значения констант и их погрешности, необходимые для вычислений

Величина	Значение величины	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность, %
ν , Гц	см. на стенде	5	-
M , кг/моль	$29.0 \cdot 10^{-3}$	$0.05 \cdot 10^{-3}$	0.17
R , Дж/моль · К	8.31	0.005	0.006
T , К	см. на стенде	0.5	-

10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ УЛЬТРАЗВУКА И МОДУЛЯ ОБЪЕМНОЙ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ СТОЯЧЕЙ ВОЛНЫ

Цель работы.

1. Изучить условия образования стоячих волн.
2. Изучить магнитострикционный способ получения ультразвука.
3. Изучить связь скорости ультразвука с параметрами среды.

Приборы и принадлежности.

1. Генератор сигналов ГЗ-56/1.
2. Частотомер ЧЗ-32.
3. Катушка возбуждения с ферритовым стержнем.
4. Пробирка с жидкостью.
5. Лезвие.
6. Масленка.

Список литературы.

1. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики, §29.6, М.: Высшая школа, 1989.
2. Трофимова Т.И. Курс физики, §157, М.: Высшая школа, 2003.
3. Савельев И.В. Курс общей физики, т.2, §93, 94, 97, 99, М.: Высшая школа, 1978.
4. Горелик Г.С. Колебания и волны, гл.6, §1, 3, 4, М.:1959.

Вопросы к зачету.

1. Определение волны. Поперечные и продольные волны. Уравнение волны.
2. Стоячая волна, уравнение стоячей волны. Координаты узлов и пучностей.
3. Волновое уравнение и его физический смысл.

4. Распространение продольных волн в твердых телах. Закон Гука для продольных деформаций. Связь скорости волны с параметрами среды.
5. Распространение продольных волн в жидкостях. Модуль объемной упругости. Связь скорости волны с параметрами среды.
6. Способы получения ультразвуковых колебаний. Магнитострикционный эффект.
7. Собственные частоты колебаний свободного стержня и столба жидкости.
8. Принцип работы установки.
9. Вывод рабочей формулы для скорости ультразвука в жидкости и модуля ее объёмной упругости.
10. Вывод рабочей формулы для скорости ультразвука в феррите и модуля его упругости.

10.1. Волновое уравнение

Воспользуемся уравнением бегущей волны (см. пп. 9.1,9.2):

$$\xi(x, t) = A \sin[\omega t - kx].$$

Продифференцируем его дважды по t :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} &= A\omega \cos[\omega t - kx], \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= -A\omega^2 \sin[\omega t - kx]. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Продифференцируем также уравнение дважды по x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= -Ak \cos[\omega t - kx], \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= -Ak^2 \sin[\omega t - kx]. \end{aligned} \tag{10.2}$$

Сравнивая (10.1) и (10.2), получаем уравнение:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (10.3)$$

где $v = \omega/k$ – скорость распространения волны ($\omega = 2\pi\nu = 2\pi v/\lambda = kv$).

Уравнение (10.3) – дифференциальное уравнение в частных производных – называется **волновым уравнением**. Волновое уравнение не имеет решений, отличных от тех, которые могут быть представлены функциями вида $\xi = A \sin(\omega t \pm kx)$ или суперпозицией таких функций $\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cdot \cos kx \cdot \sin \omega t$. Т.е., решением волнового уравнения является уравнение любой волны.

Всякий раз, когда из физических соображений можно установить, что та или иная физическая величина s удовлетворяет уравнению вида:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2},$$

то на основании вышеизложенного можно заключить, что процесс изменения этой величины носит характер плоской волны, распространяющейся в ту или другую сторону со скоростью v , или суперпозиции таких волн.

10.2. Распространение продольных волн в твердых телах

Рассмотрим распространение продольных волн в твердом свободном стержне. Следует напомнить, что при распространении волны (как поперечной, так и продольной) частицы среды не движутся вместе с волной, а совершают гармонические колебания около своих положений равновесия. В продольной волне частицы среды совершают колебания вдоль направления распространения волны. Распространение продольной волны представляет собой распространение областей сжатий и разрежений, т.е. связано с продольным растяжением и сжатием отдельных участков твердого тела. Для таких деформаций выполняется закон Гука:

$$\sigma = E \frac{\Delta x}{x} = E \varepsilon, \quad (10.4)$$

где $\sigma = F/S$ – **механическое напряжение**, возникающее под действием растягивающей (сжимающей) силы F в стержне с площадью поперечного сечения S , а $\varepsilon = \Delta x/x$ – **относительное удлинение стержня** (элемента стержня), начальная длина которого равна x . Коэффициент пропорциональности E известен как модуль продольной упругости или **модуль Юнга**. Модуль Юнга зависит только от материала тела и не зависит от его формы и размеров.

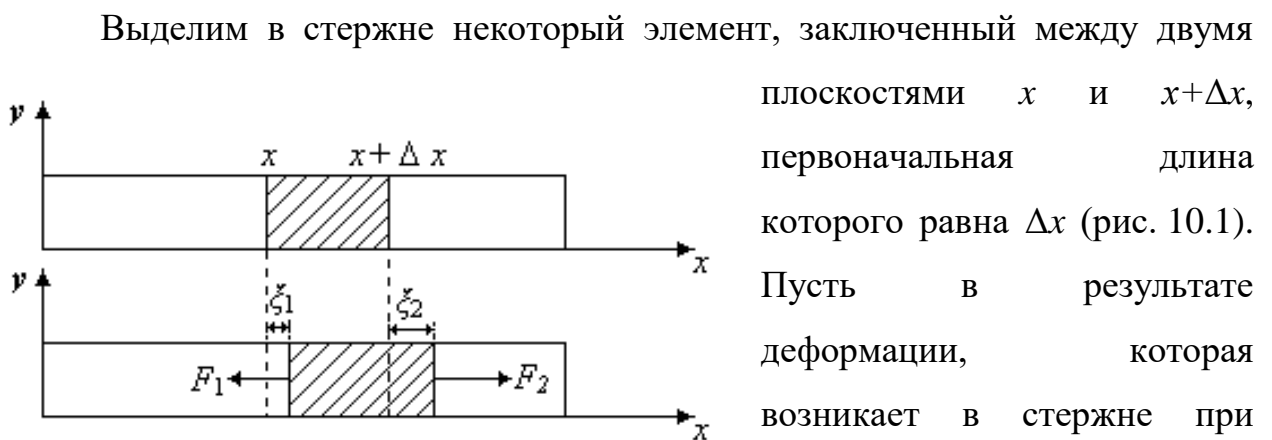


Рисунок 10.1. Распространение деформации в упругом стержне.

Выделим в стержне некоторый элемент, заключенный между двумя плоскостями x и $x+\Delta x$, первоначальная длина которого равна Δx (рис. 10.1). Пусть в результате деформации, которая возникает в стержне при распространении волны, плоскость с координатой x сместилась на расстояние ξ_1 ,

а плоскость с координатой $x+\Delta x$ – на расстояние ξ_2 .

Относительное удлинение элемента стержня равно:

$$\varepsilon = \frac{\xi_2 - \xi_1}{\Delta x} = \frac{\Delta \xi}{\xi},$$

или переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\varepsilon = \frac{d\xi}{dx}. \quad (10.5)$$

Если $\varepsilon > 0$, то это означает, что произошло растяжение стержня, если $\varepsilon < 0$ – сжатие. Следует отметить, что понятия смещение ξ и деформация означают

не одно и то же. Участок стержня может быть смещен, но не деформирован, если $\xi_1 = \xi_2$ (как правило, речь идет о смещении центра масс участка). А может наблюдаться и обратное: центр масс участка не смещен, а деформация имеет место, так как края участка сместились в противоположные стороны.

Пусть выбранный нами элемент стержня испытывает растяжение под действием, приложенным к его краям сил: $F_1 = \sigma_1 S$ и $F_2 = \sigma_2 S$ (рис. 10.1). Масса этого элемента равна $\rho S \Delta x$, где ρ и S – соответственно, плотность и площадь поперечного сечения стержня. Применим к движению этого элемента второй закон Ньютона. Пусть ξ – смещение центра масс рассматриваемого элемента. Тогда:

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = S \sigma_2 - S \sigma_1,$$

где слева стоит произведение массы элемента стержня на ускорение его центра масс, а справа – результирующая внешних сил, действующая на элемент стержня.

Разделим уравнение на $S \Delta x$:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\Delta x}.$$

Перейдя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим уравнение:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}. \quad (10.6)$$

Это уравнение справедливо в каждой точке стержня. Оно указывает, что ускорение данной точки пропорционально частной производной напряжения по x в этой точке.

Подставляя в (10.6) соотношение (10.4), получим:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}. \quad (10.7)$$

Вспомнив связь деформации ε и смещения ξ (10.5), окончательно получим:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (10.8)$$

Уравнение (10.8) есть не что иное, как **волновое уравнение** (см. (10.3)). Оно указывает, что смещение распространяется по стержню в виде волны:

$$\xi(x, t) = A \sin[\omega t - kx]. \quad (10.9)$$

или образует суперпозицию таких волн.

Если сравнить (10.3) и (10.8), то становится очевидным, что **скорость распространения волны** смещения ξ (скорость звука в стержне) равна:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (10.10)$$

Эта скорость тем больше, чем жестче и легче материал.

Наряду со смещением ξ нас интересуют скорость $u = \frac{d\xi}{dt}$, с которой движутся отдельные плоскости $x = \text{const}$ (не смешивать с v), деформация $\varepsilon = \frac{d\xi}{dx}$ и напряжение $\sigma = E\varepsilon$. Дифференцируя (10.9) по t и по x , получим:

$$u = A\omega \cos(\omega t - kx), \quad (10.11)$$

$$\varepsilon = -Ak \cos(\omega t - kx), \quad (10.12)$$

$$\sigma = -E Ak \cos(\omega t - kx). \quad (10.13)$$

Таким образом, смещение, скорость, деформация и напряжение распространяются в виде связанных определенным образом между собой недеформирующихся волн (10.9, 10.11-13), имеющих одну и ту же скорость и одинаковое направление распространения. Дойдя до конца стержня, эти

волны отражаются. Если длина стержня кратна $\lambda/4$, то в результате суперпозиции бегущих и отраженных волн появляются стоячие волны (см. п.9.3) смещения ξ , скорости u , деформации ε и напряжения σ :

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cdot \sin kx \cdot \cos \omega t, \quad (10.14)$$

$$u = u_1 + u_2 = -2A\omega \cdot \sin kx \cdot \sin \omega t, \quad (10.15)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2Ak \cdot \cos kx \cdot \cos \omega t, \quad (10.16)$$

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = 2EAk \cdot \cos kx \cdot \cos \omega t, \quad (10.17)$$

10.3. Распространение продольных волн в жидкостях

Будем считать, что рассматриваемая жидкость представляет собой сплошную непрерывную среду и находится в очень длинной цилиндрической трубе, образующие которой параллельны оси x . Под смещением ξ будем понимать общее смещение вещества, заполняющего объем, которое зависит только от координаты x .

Применяя к столбу жидкости, заполняющему трубу, те же рассуждения, что и к стержню, приходим к уравнению:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (10.18)$$

где $p = -\sigma$ есть давление в газе или жидкости (давление определяется как сила, действующая на единицу площади поверхности, и, таким образом, эквивалентна механическому напряжению). Здесь ρ_0 – значение плотности в состоянии равновесия. Пусть ей соответствует давление p_0 . Величины p_0 , ρ_0 не зависят ни от x , ни от t .

Уравнение (10.18) применимо и в случае плоских волн в неограниченной жидкой или газообразной среде (можно мысленно выделить цилиндрический столб, параллельный направлению распространения и применить к нему те же рассуждения, что к столбу, заключенному в трубе).

Введем обозначения:

$$p = p_0 + \Delta p, \quad (10.19)$$

где Δp – изменение давления при нарушении равновесия.

Подставляя (10.19) в (10.18) и принимая во внимание, что при равновесии давление не зависит от x , т. е.:

$$\frac{\partial p_0}{\partial t} = 0,$$

получаем:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{\partial(\Delta p)}{\partial x}. \quad (10.20)$$

Найдем связь между Δp и деформацией $\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial t}$. Экспериментально установлено, что изменение объема ΔV пропорционально изменению давления Δp и первоначальному объему V_0 . Математически это описывается соотношением:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = - \frac{1}{B} \Delta p, \quad (10.21)$$

где знак минус означает, что объем уменьшается с увеличением давления. Коэффициент пропорциональности B называется **модулем объемной упругости** (иногда модулем всестороннего сжатия). Понятие модуля продольной упругости или модуля Юнга для жидкостей и газов неприменимо, поскольку жидкости и газы не имеют определенной формы.

Для изменения объема жидкости в цилиндрической трубе справедливо соотношение (рис.10.1):

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{(\xi_2 - \xi_1)S}{\Delta x S} = \varepsilon.$$

Тогда выражение (10.21) примет вид:

$$\Delta p = -B\varepsilon = -B \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (10.22)$$

Подставляя (10.22) в (10.20), получаем волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{B}{\rho_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (10.23)$$

из которого следует, что смещение ξ вещества распространяется в жидкости в виде продольной волны:

$$\xi(x, t) = A \sin[\omega t - kx],$$

скорость которой равна:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}}. \quad (10.24)$$

Наряду с продольной волной смещения в столбе жидкости будут распространяться бегущая продольная гармоническая волна колебательной скорости u и волна избыточного давления Δp . Эти волны определяются уравнениями:

$$u = A\omega \cos(\omega t - kx),$$

$$\Delta p = -ABk \cos(\omega t - kx).$$

где колебательная скорость u и избыточное давление Δp получены из уравнения смещения:

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t} \text{ и } \Delta p = -B \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Отразившись от свободной поверхности жидкости, волны смещения, колебательной скорости u и избыточного давления Δp распространяются в

обратном направлении. Если длина столба жидкости кратна $\lambda/4$, то в результате суперпозиции бегущих и отраженных волн появляются стоячие волны смещения ξ , скорости u и избыточного давления Δp :

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cdot \sin kx \cdot \cos \omega t,$$

$$u = u_1 + u_2 = -2A\omega \cdot \sin kx \cdot \sin \omega t,$$

$$\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2 = -2ABk \cdot \cos kx \cdot \cos \omega t.$$

Будет ли на границе отражения узел или пучность, зависит от соотношения плотностей сред. Волна, отражаясь от более плотной среды, меняет фазу на противоположную и у границы происходит сложение колебаний с противоположными фазами, в результате чего получается узел. Если же волна отражается от менее плотной среды, то изменения фазы не происходит и у границы колебания складываются с одинаковыми фазами – образуется пучность.

10.4. Способы получения ультразвуковых колебаний (УЗК)

Для получения ультразвуковых колебаний в феррите и жидкости в данной работе используются магнитострикционный эффект. Прямой магнитострикционный эффект – это изменение размеров (деформация) ферромагнетика при намагничивании. Если по обмотке возбуждения 2, вдоль оси которой расположен ферромагнитный стержень 1 (рис.10.2), пропускать переменный ток ультразвуковой частоты, то стержень будет периодически изменять свои размеры и его колеблющиеся концы смогут возбудить в окружающей среде ультразвуковую волну. Колеблющийся магнитный стержень называют вибратором.

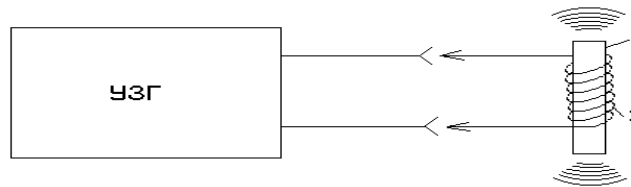


Рисунок 10.2. Схема установки для получения ультразвуковых колебаний.

В данной работе вибратор изготовлен из феррита – ферромагнитного материала, получаемого спеканием окислов двухвалентных металлов с окислом трёхвалентного железа. Феррит обладает значительной магнитострикцией и высоким удельным сопротивлением, поэтому потери в ферритовом вибраторе на вихревые токи незначительны. Основным недостатком феррита является его малая механическая прочность: ферритовые вибраторы при достижении интенсивности ультразвука порядка $2\div 4 \text{ Вт/см}^2$ терпят излом. Обычно амплитуда колебаний магнитострикционного вибратора мала, так как относительное изменение длины вибратора $\Delta l/l=10^{-5}$. Для увеличения амплитуды колебаний в магнитострикционных излучателях используют явление резонанса.

10.5. Собственные колебания свободного стержня

Если возбудить продольные колебания незакреплённого стержня, то в самом стержне при определенных условиях устанавливается стоячая волна. Причем на концах стержня будут наблюдаться пучности смещения ξ (отражение от менее плотной среды). Координаты пучностей находим из условия $\cos kx = \pm 1$, $kx = n\pi$, $x = n\pi/k = n\lambda/2$, где $n=0,1,2,\dots$. Т.е. образование стоячей волны смещения возможно при условии, что:

$$x = l = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi\lambda}{2\pi} = \frac{n\lambda}{2} = \frac{nv}{2f}, \quad (10.25)$$

где v – скорость волны, f – частота, $n = 1,2,3,\dots$

Частоты, определяемые из формулы (10.25):

$$f = \frac{nv}{2l},$$

называются собственными частотами колебаний свободного стержня. Собственная частота при $n = 1$ называется *основной собственной частотой*. Остальные собственные частоты называют гармониками соответствующего порядка. Если колебания в стержне возбуждать при основной собственной частоте, то колебания стержня будут происходить с наибольшей амплитудой. Стержень можно крепить в узловых точках. При возбуждении на основной частоте его крепят за середину резиновым колпачком.

10.6. Собственные колебания столба жидкости

Собственные частоты столба жидкости можно установить аналогично, как и для колебаний стержня. Если синусоидальные колебания возбуждать у дна цилиндрического сосуда, а поверхность жидкости граничит с воздухом (рис. 10.3), то граничные условия для образования стоячей волны такие же, как и для стержня. Резонансные частоты определяются по формуле:

$$f = \frac{nv_{\text{ж}}}{2l}, \quad (10.26)$$

где l – высота столба жидкости. Если волны в столбе возбуждаются излучателем с фиксированной частотой f_0 , то условие образования четкой стоячей волны можно получить, изменяя длину столба l жидкости.

10.7. Методика эксперимента. Вывод рабочей формулы

Установка для определения скорости ультразвука в твердом теле и жидкости (рис. 10.3) состоит из генератора ультразвуковых колебаний, частотомера и вертикально расположенной стеклянной трубки с исследуемой жидкостью, помещенной в штатив с линейкой. В жидкость добавлен порошок чешуйчатой алюминиевой пудры, образующей суспензию. Нижний

конец трубки устанавливается на верхний торец вибратора. Для надёжного акустического контакта на конец вибратора наносят слой густой смазки.

При включении вибратора в столбе жидкости устанавливается стоячая



Рисунок 10.3. Внешний вид установки для определения скорости ультразвука в твердом теле и жидкости

волна. В узлах стоячей волны чешуйки ориентируются своей плоскостью перпендикулярно направлению колебания. При этом рассеяние света в узлах и пучностях различное – суспензия в узлах менее прозрачная (мы наблюдаем четкие и узкие полосы алюминиевой пудры). Это позволяет измерить длину стоячей волны в жидкости, как расстояние между соседними узлами. По известной частоте ультразвука и измеренной в опыте длине стоячей волны можно определить скорость ультразвука в жидкости.

Для определения длины стоячей волны измеряют расстояние L_n , на котором укладывается n стоячих волн (обычно $n=16\div 20$) и делят это расстояние на n :

$$\lambda_{\text{ст}} = \frac{L_n}{n}. \quad (10.27)$$

Длина бегущей волны вдвое больше длины стоячей волны:

$$\lambda = 2 \frac{L_n}{n} = 2\lambda_{\text{ст}}. \quad (10.28)$$

Так как длина бегущей волны связана со скоростью волны v и частотой ультразвука f соотношением $\lambda=v/f$, находим скорость ультразвука в жидкости:

$$v_{\text{ж}} = 2\lambda_{\text{ст}}f. \quad (10.29)$$

Значение модуля объёмной упругости жидкости можно найти из выражения:

$$B_{\text{ж}} = v_{\text{ж}}^2 \rho_{\text{ж}}, \quad (10.30)$$

где $\rho_{\text{ж}}$ – плотность жидкости ($\rho_{\text{ж}} = (0,78 \pm 0,01) \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$).

Скорость ультразвука в феррите и модуль его упругости можно найти, если определить основную резонансную частоту вибратора f . На длине стержня l_0 при возбуждении его на основной частоте укладывается половина бегущей волны: $\lambda = 2l_0$.

Так как $\lambda = v/f$, то скорость ультразвука в феррите равна:

$$v_0 = 2l_0f. \quad (10.31)$$

Модуль упругости феррита E находят из соотношения:

$$E_{\text{Ф}} = v_{\text{Ф}}^2 \rho_{\text{Ф}}, \quad (10.32)$$

где $\rho_{\text{Ф}}$ – плотность феррита ($\rho_{\text{Ф}} = (4,70 \pm 0,05) \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$).

10.8. Порядок выполнения работы

1. Измерить длину ферритового стержня l_0 с помощью линейки в метрах. Определить приближенное значение резонансной частоты по формуле:

$$f_{\text{расч}} = \frac{28,6 \cdot 10^2}{l_0}, \text{ Гц.} \quad (10.33)$$

2. Вставить стержень в катушку возбуждения. Проверить отсутствие смазки на торце стержня. На торец стержня положить лезвие безопасной бритвы.

3. Включить генератор ГЗ-56/1 и частотомер ЧЗ-32. Дать им прогреться 2 минуты.

4. Установить частоту генератора в соответствии с резонансной частотой стержня $f_{\text{расч}}$, рассчитанной по формуле (10.33).

5. Ручкой «Рег. выхода» установить на шкале вольтметра напряжение 15 В.

6. Медленно вращая в обе стороны регулятор "частота Hz", настроить частоту генератора в резонанс с вибратором (при резонансе лезвие бритвы издаёт дребезжащий звук). Не менее трех раз измерить резонансную частоту $f_{\text{изм}}$ и записать её в таблицу 10.1. Снять лезвие со стержня.

Таблица 10.1.

$f_{\text{изм}}, 10^3$ Гц	$\Delta f_{\text{изм}}, 10^3$ Гц	$L_n, 10^{-3}$ м	$\Delta L_n, 10^{-3}$ м	n	$\lambda_{\text{ст}}, 10^{-2}$ м	$\Delta \lambda_{\text{ст}}, 10^{-2}$ м
			0,5			
			0,5			
			0,5			
$\bar{f}_{\text{изм}} =$	$\overline{\Delta f}_{\text{изм}} =$	-	-	-	$\bar{\lambda}_{\text{ст}} =$	$\overline{\Delta \lambda}_{\text{ст}} =$

7. Ручкой «Рег. выхода» уменьшить напряжение до 0.

8. Вынуть из стойки трубку с исследуемой жидкостью и несколько раз перевернуть её, добиваясь равномерного распределения алюминиевой пыли по всему объёму жидкости. Вернуть трубку в стойку.

9. Нанести на конец вибратора густую смазку и поместить вибратор под дно трубки.

10. Ручкой «Рег. выхода» установить напряжение не более 20 В.

11. Подстраивая частоту ручкой “частота Hz”, получить в стеклянной трубке стоячую волну.

12. С помощью линейки не менее трех раз измерить расстояние L_n , на котором укладывается n стоячих волн (обычно $n = 16 \div 20$).

13. Выключить приборы. Тщательно вытереть смазку с торца стержня.

14. По формуле (10.27) рассчитать длину стоячей волны для трех измерений L_n . Найти среднее значение длины стоячей волны $\bar{\lambda}_{ст}$.

15. По формулам (10.29), (10.30), (10.31) и (10.32) вычислить скорость ультразвука в жидкости $v_{ж}$, модуль объёмной упругости $B_{ж}$ жидкости, скорость ультразвука в феррите $v_{ф}$ и модуль его упругости $E_{ф}$ и их погрешности.

1) $v_{ж} = 2\lambda_{ст} f_{изм} =$

$$B_{ж} = v_{ж}^2 \rho_{ж} =$$

2) $v_{ф} = 2l_0 f_{изм} =$

3) $E_{ф} = v_{ф}^2 \rho_{ф} =$

4) $\Delta v_{ж} = v_{ж} \left(\frac{\Delta f}{f} + \frac{\Delta L_n}{L_n} \right) = \dots$ м/с, где $\Delta f = 0,5$ Гц, $\Delta L_n = 0,5 \cdot 10^{-3}$ м.

5) $\Delta B_{ж} = B_{ж} \left(2 \frac{\Delta v_{ж}}{v_{ж}} + \frac{\Delta \rho_{ж}}{\rho_{ж}} \right) = \dots$ Па, где $\Delta \rho_{ж} = 0,5$ кг/м³.

6) $\Delta v_{ф} = v_{ф} \left(\frac{\Delta l_0}{l_0} + \frac{\Delta \bar{f}_{изм}}{\bar{f}_{изм}} \right) = \dots$ м/с, где $\Delta l_0 = 0,5 \cdot 10^{-3}$ м, $\Delta f = 0,5$ Гц.

7) $\Delta E_{ф} = E_{ф} \left(2 \frac{\Delta v_{ф}}{v_{ф}} + \frac{\Delta \rho_{ф}}{\rho_{ф}} \right) = \dots$ Па, где $\Delta \rho_{ф} = 0,5$ кг/м³.

16. Записать окончательные результаты в виде:

$$v_{ж} = (v_{ж} \pm \Delta v_{ж}) \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

$$B_{ж} = (B_{ж} \pm \Delta B_{ж}) \text{ Па},$$

$$v_{ф} = (v_{ф} \pm \Delta v_{ф}) \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

$$E_{ф} = (E_{ф} \pm \Delta E_{ф}) \text{ Па}.$$

11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ МЕТОДОМ ОТРЫВА КОЛЬЦА

Цель работы.

1. Изучить явление поверхностного натяжения жидкости и капиллярные явления.
2. Измерить коэффициент поверхностного натяжения методом отрыва кольца.

Список литературы.

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики, т.1., М.: Наука, 1989.
2. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики, М.: Высшая школа, 1989.
3. Трофимова Т.И. Курс физики, М.: Высшая школа, 1998.
4. Савельев И.В. Курс общей физики, т.1, гл.14, М.: Наука, 1977.

Порядок теоретической подготовки к выполнению работы.

Изучить и законспектировать в тетрадь ответы на контрольные вопросы.

Вопросы к зачету.

1. Какими свойствами обладает поверхностный слой жидкости?
2. Что называется коэффициентом поверхностного натяжения?
3. Что называется краевым углом? Условия смачивания и несмачивания твёрдых тел жидкостью?
4. Вывод расчетной формулы для вычисления коэффициента поверхностного натяжения? Объяснить необходимость использования в данной работе эталонной жидкости.
5. Как направлена сила поверхностного натяжения?
6. Капиллярные явления. Высота поднятия жидкости в капиллярах.
7. Давление над искривлённой поверхностью. Формула Лапласа.

Приборы и принадлежности:

1. Крутильные весы.
2. Кольцо.
3. Дистиллированная вода (эталонная жидкость).
4. Спирт технический (исследуемая жидкость).

11.1. Общие сведения о свойствах реальных жидкостей

По своей структуре и характеру движения молекул жидкости занимают промежуточное положение между газами и твердыми кристаллическими телами. Газ характеризуется большой степенью разреженности и полным хаосом в пространственном распределении частиц в объеме. Для кристаллического состояния характерно упорядоченное расположение частиц в некоторой пространственной решетке (имеет место **дальний порядок**). Частицы жидкости почти так же плотно расположены в пространстве, как и в твердых телах (плотность жидкости приблизительно на 10% меньше плотности твердых тел). Однако в жидкостях упорядоченность расположения частиц сохраняется только на расстояниях, равных нескольким молекулярным радиусам, т.е. имеет место так называемый **ближний порядок**.

В жидкостях среднее расстояние между молекулами того же порядка, что и их размеры. Поэтому перемещение частиц в объеме жидкости крайне затруднительно. Согласно Я. И. Френкелю, тепловое движение молекул жидкости сводится к колебаниям около некоторых положений равновесия и переходам время от времени из одного положения равновесия в другое. При повышении температуры жидкости время колебаний около одного положения равновесия (**время релаксации**) уменьшается, подвижность молекул возрастает, изменяются свойства жидкости (например, снижается вязкость жидкостей). Если на жидкость действует сила в течение времени большего, чем время релаксации, то, переходя из одного положения равновесия в другое, молекула перемещается в направлении силы. Этим

объясняется способностью жидкости изменять свою форму (текучесть жидкости).

Характерной особенностью жидкости является ее способность иметь свободную поверхность (не ограниченную твердыми стенками). В поле силы тяжести эта поверхность всегда перпендикулярна к линии напряженности поля, в чем легко убедиться, слегка наклонив сосуд с жидкостью. В свободном состоянии жидкость стремится образовать минимальную свободную поверхность при данном объеме. Так, в состоянии невесомости жидкость принимает форму шара.

Причина такого своеобразного поведения жидкости заключается в особом энергетическом состоянии молекул поверхностного слоя и обусловлено действием сил молекулярного взаимодействия (притяжения и отталкивания). Эти силы направлены по линии, соединяющей молекулы, зависят от расстояния между ними и весьма быстро убывают с увеличением расстояния между молекулами.

Взаимодействие двух молекул можно описать при помощи графика (рис. 11.1) зависимости проекции равнодействующей F сил притяжения и отталкивания молекул от расстояния r между их центрами. Силы отталкивания гораздо больше сил притяжения на малых расстояниях ($r < r_0$), но гораздо быстрее убывают с увеличением r . Силы притяжения тоже

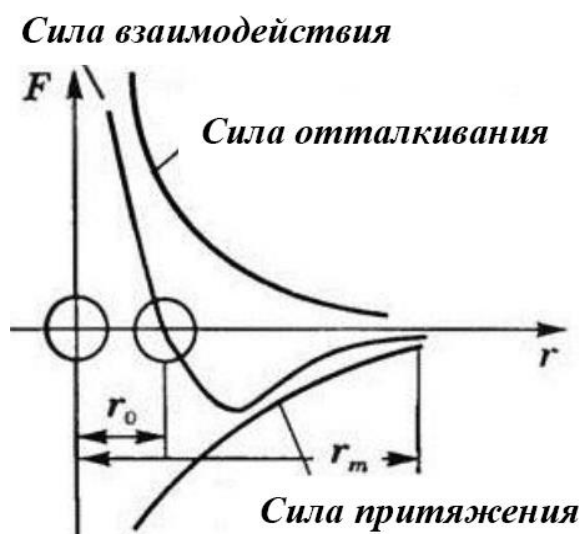


Рисунок 11.1.

быстро убывают с увеличением r , так что, начиная с некоторого расстояния r_m , взаимодействием молекул можно пренебречь. Наибольшее расстояние r_m , на котором молекулы еще взаимодействуют, называется **радиусом сферы молекулярного действия**. При $r = r_0$ силы отталкивания по модулю равны

силам притяжения. Расстояние r_0 соответствует устойчивому равновесному взаимному положению молекул.

Этим объясняются особенности сил молекулярного взаимодействия. Так, значение молекулярных сил не зависит от общего числа молекул. Поэтому плотность или упругие свойства жидкостей и твёрдых тел не зависят от размеров исследуемого образца; капля воды и вода в океане при одинаковой температуре и одинаковом внешнем давлении имеют совершенно одинаковые плотность и сжимаемость и т. п.

11.2. Поверхностный слой. Поверхностное натяжение

Рассмотрим особенности поверхностного слоя жидкости (рис.11.2).

Пусть r_m - радиус сферы молекулярного действия. Если молекула *A* занимает положение, при котором вся сфера её действия заполнена другими молекулами той же жидкости, то относительно молекулярных сил, действующих на неё, она находится в равновесии, так как равномерно притягивается во все стороны. Это равновесие нарушается, когда молекула находится у поверхности жидкости на

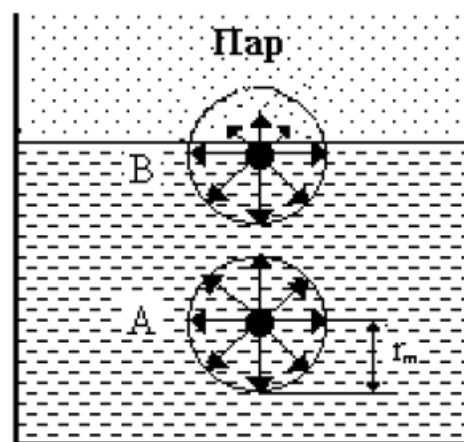


Рисунок 11.2.

глубине, меньшей радиуса молекулярного действия (например, молекула *B*). Нижняя половина сферы заполнена жидкостью, тогда как часть верхней полусферы заполнена паром, имеющим меньшую плотность. Поэтому притяжение со стороны нижележащих молекул будет больше, а равнодействующая всех действующих на молекулу *B* молекулярных сил направлена внутрь жидкости и в общем случае не перпендикулярна и не параллельна поверхности жидкости.

Для того чтобы найти равнодействующую всех сил, действующих на рассматриваемую молекулу на поверхности жидкости, необходимо сложить

силы, с которыми рассматриваемая молекула притягивается к каждой молекуле, входящей в сферу молекулярного действия. Для этого каждую такую силу следует представить в виде двух ортогональных составляющих: нормальную к поверхности жидкости и касательную к ней. Первая – нормальная к поверхности сила – вызывает так называемое **внутреннее, или молекулярное давление** – давление жидкости на себя. Это давление не действует на тела, помещенные в жидкость, ибо оно вызвано исключительно молекулярными силами. Вторая же сила – касательная к поверхности – называется **силой поверхностного натяжения**. Эта сила всегда стремится сократить свободную поверхность жидкости. Если мы будем каким-либо способом растягивать поверхность, силы поверхностного натяжения будут препятствовать этому.

Рассмотрим этот процесс с энергетической точки зрения.

Для перемещения молекулы из глубины жидкости в поверхностный слой надо затратить работу на преодоление сил внутреннего давления. Эта работа совершается за счет кинетической энергии молекул и идет на увеличение их потенциальной энергии. Поэтому молекулы поверхностного слоя жидкости обладают избыточной потенциальной энергией (по сравнению с потенциальной энергией молекул внутри жидкости), которая и называется **поверхностной энергией**.

Так как равновесное состояние характеризуется минимумом потенциальной энергии, то жидкость при отсутствии внешних сил будет принимать такую форму, чтобы при заданном объеме она имела минимальную поверхность, т.е. форму шара.

В жидкости при заданных внешних условиях устанавливается равновесие, при котором число молекул в поверхностном слое с течением времени не меняется. Если же по каким-то причинам поверхность жидкости увеличивается (некоторое количество молекул перейдет из глубины жидкости в поверхностный слой), то для этого нужно затратить внешнюю

работу ΔA , которая пропорциональна изменению площади поверхности ΔS жидкости:

$$\Delta A = \sigma \cdot \Delta S, \quad (11.1)$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения. Он зависит от природы жидкости, ее состояния и от температуры.

Коэффициент поверхностного натяжения численно равен работе, необходимой для увеличения поверхности жидкости на единицу площади при постоянной температуре:

$$\sigma = \frac{\Delta A}{\Delta S}, \quad [\sigma] = \text{Дж/м}^2.$$

Для большинства жидкостей коэффициент поверхностного натяжения с увеличением температуры уменьшается по линейному закону:

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 - \frac{t}{t_k}\right), \quad (11.2)$$

где σ_0 – коэффициент поверхностного натяжения данной жидкости при 0°C , t_k – критическая температура данной жидкости. При $t = t_k$ коэффициент поверхностного натяжения обращается в нуль, так как в критической точке разница между жидким и газообразным состояниями вещества пропадает.

Коэффициент поверхностного натяжения можно определить не только энергетически. Поверхностное натяжение проявляет себя как сила в следующем простом примере. Пусть поверхность жидкости представляет собой растянутую пленку (рис. 11.3). Эта пленка стремится уменьшить свою поверхность.

Для того чтобы удержать ее в равновесии, нужно приложить к

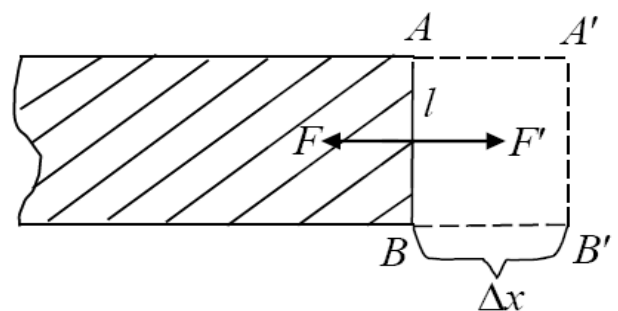


Рисунок 11.3.

границе пленки AB силу F' . При равномерном перемещении границы поверхностного слоя AB на Δx сила F' совершит работу:

$$\Delta A = F' \cdot \Delta x. \quad (11.3)$$

Используя формулы (11.1) и (11.3) получим:

$$\sigma \Delta S = F' \cdot \Delta x.$$

А так как $\Delta S = l \cdot \Delta x$ и $F' = F$, тогда:

$$F = \sigma \cdot l. \quad (11.4)$$

Силу F называют **силой поверхностного натяжения**.

Таким образом, на линию, ограничивающую поверхность жидкости (или какой-либо участок этой поверхности), действуют силы, направленные перпендикулярно этой линии по касательной к поверхности, внутрь ее. Поверхностный слой жидкости всегда ограничен линией возможного разрыва и находится под действием сил поверхностного натяжения в постоянном натяжении, стремящемся сократить поверхность. Сокращение поверхности возможно при условии, если силы поверхностного натяжения будут касательными к поверхности и перпендикулярными к линии возможного разрыва. Отсюда следует второе определение: **коэффициент поверхностного натяжения** равен силе поверхностного натяжения, действующей на единицу длины линии, ограничивающей поверхность жидкости (или линии возможного разрыва):

$$\sigma = \frac{F}{l}, \quad (11.5)$$

где $[\sigma] = \text{Н/м}$. Коэффициент σ имеет порядок $(10^{-2} \div 10^{-1}) \text{ Н/м}$.

Например, для воды он равен 0.073 Н/м , для ртути 0.5 Н/м при 20°C .

Сильно влияют на коэффициент поверхностного натяжения примеси.

Если энергия взаимодействия молекулы растворенного вещества с молекулой

жидкости меньше энергии взаимодействия между молекулами жидкости, то растворенные молекулы будут вытесняться на поверхность жидкости и одновременно будут уменьшать поверхностное натяжение раствора. Такие вещества называются **поверхностно-активными**. По отношению к воде поверхностно-активными являются мыло, спирт, нефть, эфир и другие.

С другой стороны, некоторые вещества увеличивают поверхностное натяжение жидкостей в связи с тем, что их молекулы взаимодействуют с молекулами жидкости сильнее, чем молекулы жидкости между собой. Поэтому молекулы таких примесей будут втянуты внутрь жидкости, и в поверхностном слое останутся, в основном, молекулы жидкости. По отношению к воде примерами таких примесей могут служить соль и сахар.

11.3. Смачивающие и несмачивающие жидкости. Краевой угол

Явление смачивания зависит от характера сил, действующих между молекулами поверхностных слоев соприкасающихся сред.

Если силы взаимодействия между молекулами жидкости больше, чем между молекулами жидкости и твердого тела, то жидкость стремится уменьшить поверхность соприкосновения с твердым телом. Капля такой жидкости на горизонтальной поверхности будет иметь вид сплющенного шара (рис. 11.4). Сплющивание обусловлено действием силы

тяжести. Такие жидкости называется несмачивающими.

Угол θ , образованный

поверхностью твердого тела и касательной к поверхности жидкости называется **краевым углом**. Для не смачивающей жидкости $\theta > 90^\circ$. Если $\theta = 180^\circ$ - наблюдается полное **несмачивание**.

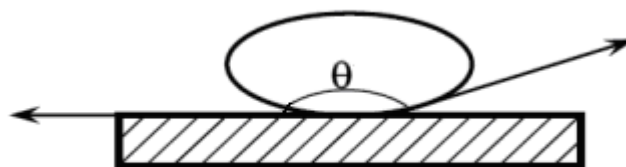


Рисунок 11.4.

Если силы взаимодействия между молекулами жидкости меньше, чем между молекулами жидкости и твердого тела, то жидкость стремится увеличить поверхность соприкосновения с твердым телом. Капли жидкости при этом имеют форму, изображенную на рис. 11.5.

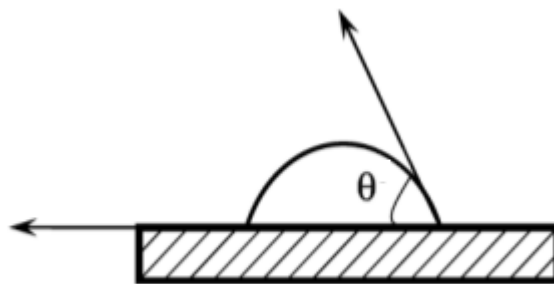


Рисунок 11.5.

При этом жидкость называется **смачивающей**.

Краевой угол при этом $\theta < 90^\circ$. Если $\theta = 0$, то наблюдается полное смачивание, т.е. жидкость растекается по всей поверхности твердого тела.

Смачивание и несмачивание – понятия относительные, т.к. жидкость, смачивающая одно твердое тело, может не смачивать другое. Например, вода смачивает стекло, но не смачивает парафин, а ртуть не смачивает стекло, но смачивает медь.

11.4. Давление над искривленной поверхностью жидкости. Формула Лапласа

Вследствие сил поверхностного натяжения жидкость испытывает внутреннее давление. Оно направлено перпендикулярно поверхности жидкости. Поэтому жидкость, не подверженная действию внешних сил, должна принять форму шара, т.к. только в этом случае силы внутреннего давления взаимно уравновесятся.

Под искривленной поверхностью кроме внутреннего давления P_0

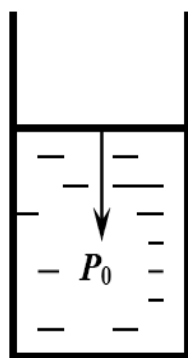


Рисунок 11.6-а

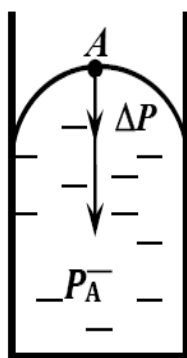


Рисунок 11.6-б

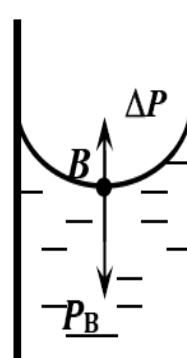


Рисунок 11.6-в

создается еще дополнительное давление ΔP , обусловленное кривизной поверхности. Рассмотрим следующие случаи, когда поверхность жидкости имеет не плоскую форму (рис. 11.6).

Выпуклая поверхность (рис. 11.6-б) стремится сократиться и принять плоскую форму. Поэтому она будет оказывать на жидкость дополнительное давление ΔP , направленное так же, как и внутреннее давление P_0 в случае не искривленной поверхности, причем $P_A = P_0 + \Delta P$, где P_0 – атмосферное давление.

В случае вогнутой поверхности (рис. 11.6-в) дополнительное давление ΔP направлено противоположно внутреннему давлению: $P_A = P_0 - \Delta P$.

Определим величину добавочного давления ΔP . Рассмотрим сферическую каплю жидкости, разделив ее на два полушария (рис. 11.7). Вследствие поверхностного натяжения оба полушария притягиваются друг к другу с силой:

$$F = \sigma 2\pi R,$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения; R – радиус капли.

Оба полушария прижимаются друг к другу по поверхности: $S = \pi R^2$.

Тогда дополнительное давление, обусловленное силой поверхностного натяжения:

$$\Delta P = \frac{F}{S} = \frac{\sigma 2\pi R}{\pi R^2} = \frac{2\sigma}{R}. \quad (11.6)$$

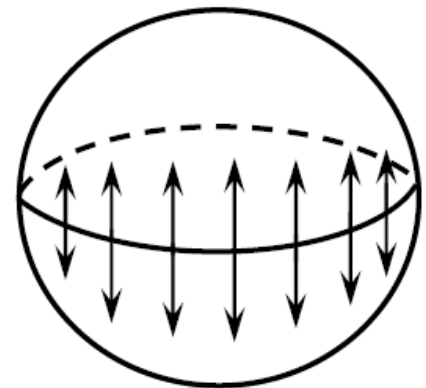


Рисунок 11.7.

В общем случае избыточное давление для произвольной поверхности жидкости определяется по формуле Лапласа:

$$\Delta P = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (11.7)$$

где R_1 и R_2 – радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных сечений поверхности жидкости (рис. 11.8): $R_1 = AO$, $R_2 = BF$.

Для выпуклой поверхности $R > 0$, для вогнутой $R < 0$.

Для цилиндрической поверхности ($R_1 = R$ и $R_2 = \infty$) избыточное давление определяется:

$$\Delta P = \sigma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\infty} \right) = \frac{\sigma}{R}.$$

В случае плоской поверхности ($R_1 = R_2 = \infty$) силы поверхностного натяжения избыточного давления не создают.

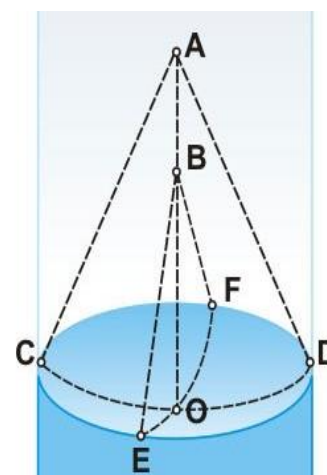


Рисунок 11.8

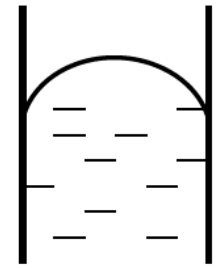
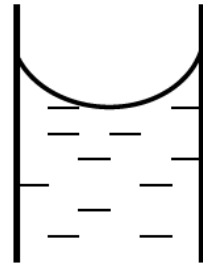
11.5 Капиллярные явления

Рассмотренные ранее явления смачивания и несмачивания влияют и на форму поверхности жидкости, налитой в сосуд. Если жидкость налита в широкий сосуд, то из-за действия силы тяжести ее поверхность становится плоской и горизонтальной и только у самых стенок сосуда поверхность жидкости оказывается все же немного искривленной: жидкости, смачивающие стенку, имеют в непосредственной близости от нее вогнутую поверхность, а несмачивающие – выпуклую. Однако в состоянии невесомости поверхность жидкости оказывается искривленной в сосуде любой ширины.

Например, поверхность воды в стеклянном стакане имеет форму полусферы независимо от поперечных размеров стакана.

Если сосуд имеет форму трубки очень малого сечения, то жидкость в нем образует свободную поверхность сплошной кривизны, т.е. краевые искривления охватывают всю поверхность жидкости, делая ее целиком

изогнутой: вогнутой для смачивающей (рис. 11.9-а) жидкости, выпуклой – для несмачивающей (рис. 11.9-б).



Такая изогнутая поверхность называется **мениском**, а узкие сосуды (трубки, щели и т.д.) называются **капиллярами**.

Рисунок 11.9-а

Рисунок 11.9-б

Благодаря большой кривизне мениска под ним создается значительное избыточное давление. Это приводит к поднятию в случае смачивания (рис. 11.10-а) или опусканию в случае несмачивания (рис. 11.10-б) жидкости в капилляре. Изменение

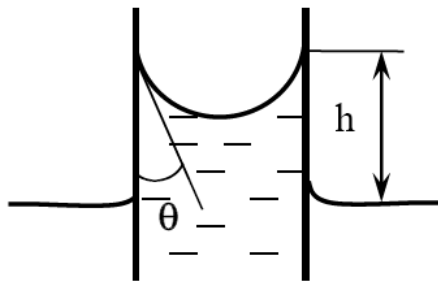


Рисунок 11.10-а

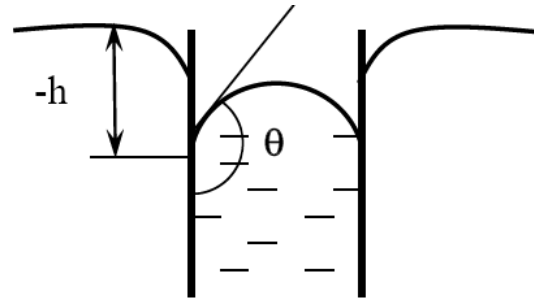


Рисунок 11.10-б

высоты уровня жидкости в узких трубках или зазорах называется **капиллярностью**.

Определим высоту поднятия (опускания) жидкости в капилляре. Пусть конец цилиндрического капилляра радиуса r погружен в смачиваемую жидкость. Поверхность жидкости примет вогнутую форму (рис. 11.11). Жидкость в капилляре поднимается или опускается на такую высоту h , при которой гидростатическое давление столба жидкости ρgh уравнивается избыточным давлением ΔP :

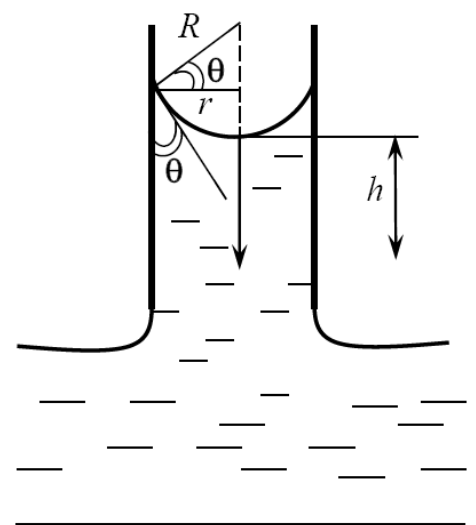


Рисунок 11.11

$$\rho gh = \frac{2\sigma}{R}.$$

Следовательно,

$$h = \frac{2\sigma}{R\rho g}, \quad (11.8)$$

где ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения, R – радиус кривизны мениска.

Так как угол между радиусом капилляра r и радиусом кривизны мениска R и краевой угол θ равны между собой (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами), то:

$$R = \frac{r}{\cos\theta}.$$

После подстановки в (11.8) получим выражение для высоты подъема (опускания) жидкости в капилляре:

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{r\rho g}. \quad (11.9)$$

Таким образом, высота поднятия (опускания) жидкости в капилляре обратно пропорциональна радиусу капилляра. При $\theta < \pi/2$ жидкость поднимается ($h > 0$), а при $\theta > \pi/2$ жидкость опускается ($h < 0$).

Капиллярные явления часто встречаются в природе и широко используются в технике. Влагообмен в почве осуществляется за счет капиллярности. Капиллярностью объясняет гигроскопичность веществ.

11.6 Метод отрыва кольца для определения коэффициента поверхностного натяжения жидкости.

Горизонтально расположенное кольцо приводится в соприкосновение с жидкостью. Если его медленно поднимать, то оно, в результате

взаимодействия молекул жидкости с молекулами твердого тела, увлекает за собой жидкость. В момент отрыва от кольца, оно будет находиться на некоторой высоте Δh над поверхностью жидкости (рис. 11.12).

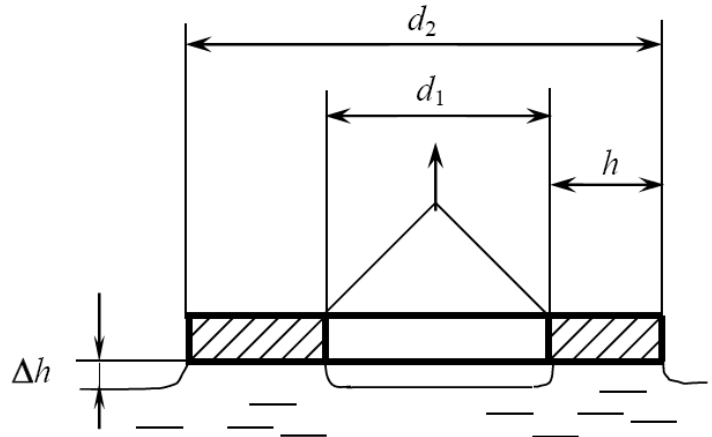


Рисунок 11.12

Пленка, которая при этом образовалась, будет соприкасаться с кольцом по его наружному и внутреннему периметрам. Значит, сила поверхностного

натяжения будет приложена к линии, длина которой будет равна сумме длин двух окружностей. Направлена эта сила по касательной к поверхности пленки, перпендикулярно к линии, по которой происходит разрыв.

Длина поверхности пленки: $l = \pi d_1 + \pi d_2$, где d_1 , d_2 – внутренний и наружный диаметры кольца. А так как $d_2 = d_1 + 2h$, то $l = \pi d_1 + \pi(d_1 + 2h)$.

Тогда, согласно (11.5), получим:

$$\sigma = \frac{F}{2\pi(d_1 + h)}. \quad (11.9)$$

Силу поверхностного натяжения можно найти исходя из того, что в момент отрыва к кольцу была приложена сила F' , численно равная силе поверхностного натяжения F и направленная вертикально вверх. Если кольцо подвесить к динамометрической пружине, то по растяжению пружины можно определить силу поверхностного натяжения. Пружина должна быть проградуирована.

Для определения силы можно также воспользоваться крутильными весами. Для этого кольцо (1) укрепляется на рычаг (2) жестко связанный с упругой нитью (3) (рис. 11.13).

Если нить закручивать на некоторый угол, то рычаг будет подниматься и поднимать кольцо. В момент отрыва кольца фиксируется угол, на который

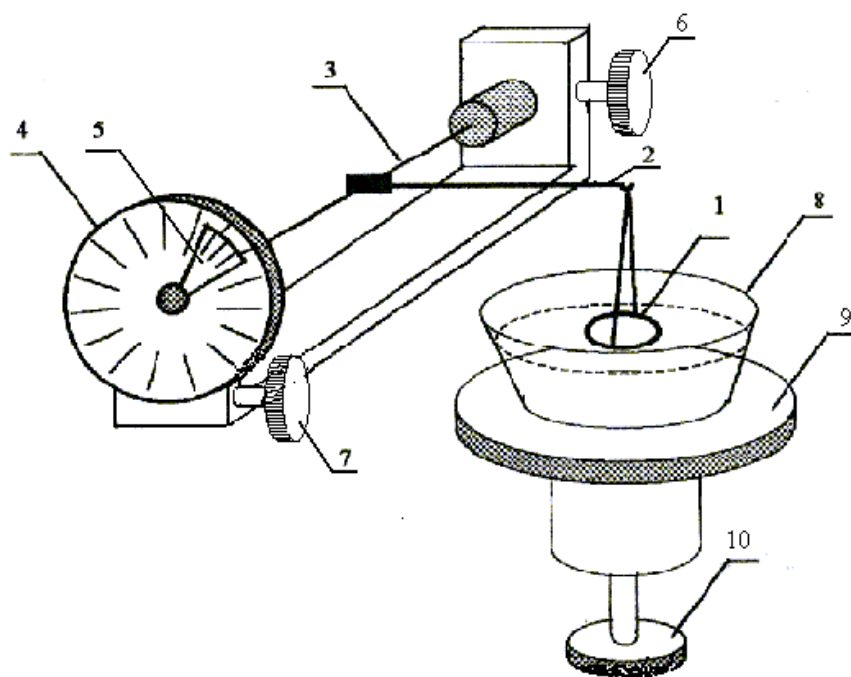


Рисунок 11.13

закручена нить. По углу закручивания определяют величину упругой силы F' , приложенной к кольцу: $F' = c\alpha$, где c – параметр, зависящий от упругих свойств крутильных весов, а α – показание весов в делениях шкалы, соответствующее моменту отрыва

кольца. Эта сила равна силе поверхностного натяжения в момент отрыва $F' = F$:

$$c\alpha_{\text{иссл}} = \sigma_{\text{иссл}}l. \quad (11.10)$$

Т.к. учет упругих параметров нити (c) вызывает определенные трудности, то пользуются методом сравнения. Для сравнения используют эталонную жидкость с известным коэффициентом поверхностного натяжения $\sigma_{\text{эт}}$ при данной температуре.

Проведя измерения $\alpha_{\text{эт}}$ для эталонной жидкости, получим аналогичное соотношение:

$$c\alpha_{\text{эт}} = \sigma_{\text{эт}}l. \quad (11.11)$$

Разделив уравнение (11.10) на уравнение (11.11), получим выражение для коэффициента поверхностного натяжения исследуемой жидкости:

$$\sigma_{\text{иссл}} = \sigma_{\text{эт}} \frac{\alpha_{\text{иссл}}}{\alpha_{\text{эт}}}. \quad (11.12)$$

11.7 Порядок выполнения работы

1. Познакомиться с устройством крутильных весов.
2. Оценить цену деления основной шкалы c и цену деления нониусной шкалы C ($C = c/m$, где m - число делений нониусной шкалы).
3. Поместить кольцо 1 на коромысло 2. С помощью регулировочного винта 6 добиться горизонтального положения коромысла 2 (рис.11.13).
4. Совместить нулевое деление нониусной шкалы 5 с нулевым делением основной шкалы 4.
5. Опустив столик 9 с помощью регулировочного винта 10, поставить на него сосуд с эталонной жидкостью (вода) 8.
6. Поднять столик до положения, когда кольцо коснётся жидкости.
7. Медленно вращать винт 7 по часовой стрелке до момента отрыва кольца от жидкости.
8. Снять показания $\alpha_{\text{эт}}$ по шкале 4. Значение $\alpha_{\text{эт}}$ занести в таблицу 1.
9. Совместить нулевое деление нониусной шкалы с нулевым делением основной шкалы (при этом кольцо должно снова коснуться жидкости).
10. Повторить измерение $\alpha_{\text{эт}}$ еще четыре раза.
11. Опустить столик 9. Заменить эталонную жидкость исследуемой (спиртом).
12. Произвести измерения $\alpha_{\text{иссл}}$ не менее пяти раз. Данные занести в таблицу 11.1:

Таблица 11.1.

№ п/п	$\alpha_{\text{ЭТ}}(\text{вода})$	$\Delta\alpha_{\text{ЭТ}}$	$\alpha_{\text{иссл}}(\text{спирт})$	$\Delta\alpha_{\text{иссл}}$
1				
2				
3				
4				
5				
среднее	$\overline{\alpha_{\text{ЭТ}}} =$	$\overline{\Delta\alpha_{\text{ЭТ}}} =$	$\overline{\alpha_{\text{иссл}}} =$	$\overline{\Delta\alpha_{\text{иссл}}} =$

13. Рассчитать значения $\overline{\alpha_{\text{ЭТ}}}$, $\overline{\Delta\alpha_{\text{ЭТ}}}$, $\overline{\alpha_{\text{иссл}}}$ и $\overline{\Delta\alpha_{\text{иссл}}}$.

14. Рассчитать значение коэффициента поверхностного натяжения исследуемой жидкости $\sigma_{\text{иссл}}$ и погрешности измерений:

$$\sigma_{\text{иссл}} = \sigma_{\text{ЭТ}} \frac{\overline{\alpha_{\text{иссл}}}}{\overline{\alpha_{\text{ЭТ}}}}$$

$$\varepsilon_{\sigma} = \frac{\Delta\sigma_{\text{иссл}}}{\sigma_{\text{иссл}}} = \frac{\Delta\sigma_{\text{ЭТ}}}{\sigma_{\text{ЭТ}}} + \frac{\overline{\Delta\alpha_{\text{иссл}}}}{\overline{\alpha_{\text{иссл}}}} + \frac{\overline{\Delta\alpha_{\text{ЭТ}}}}{\overline{\alpha_{\text{ЭТ}}}}$$

$$\Delta\sigma_{\text{иссл}} = \varepsilon_{\sigma} \sigma_{\text{иссл}}$$

15. Записать значение коэффициента поверхностного натяжения с учётом погрешностей:

$$\sigma = \sigma_{\text{иссл}} \pm \Delta\sigma_{\text{иссл}}, \text{ при } \varepsilon_{\sigma} = \dots$$

Приложение: при вычислениях использовать следующие значения известных величин:

$$\sigma_{\text{ЭТ}} = 72.8 \text{ мН/м}, \Delta\sigma_{\text{ЭТ}} = 0.05 \text{ мН/м}.$$

12. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВЯЗКОСТИ ЖИДКОСТИ МЕТОДОМ СТОКСА

Цель работы.

1. Ознакомиться с явлениями переноса.
2. Ознакомиться с некоторыми особенностями жидкого состояния.
3. Изучить явление внутреннего трения.
4. Определить коэффициенты динамический и кинематический вязкости жидкости методом Стокса.

Список литературы.

1. Савельев И.В. Курс общей физики, т.1, М.: Наука, 1982.
2. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике, М.: Наука, 1985.
3. Трофимова Т.И. Курс физики, М.: Высшая школа, 2003.
4. Наркевич И.И., Волмянский Э.И., Лобко С.И. Физика для ВТУЗов. Механика. Молекулярная физика, Мн.: Вышэйшая школа, 1992.
5. Зисман Т.А., Тодес О.М. Курс общей физики, Киев: Дніпро, 1994.

Порядок теоретической подготовки к выполнению работы.

Изучить и законспектировать в тетрадь ответы на контрольные вопросы.

Вопросы к зачету.

1. Какие явления относятся к явлениям переноса в термодинамически неравновесных системах?
2. В чем состоит явление теплопроводности? Сформулируйте закон Фурье. От чего зависит коэффициент теплопроводности?
3. В чем состоит явление диффузии? Сформулируйте закон Фика. От чего зависит коэффициент диффузии?

4. Чем обусловлено внутреннее трение (переноса импульса) в жидкости и газах?
5. Как связана сила внутреннего трения между слоями с распределением скоростей в потоке жидкости или газа? От чего зависит коэффициент внутреннего трения (коэффициент динамической вязкости)?
6. В чем сущность и общность явлений теплопроводности, диффузии, внутреннего трения?
7. В чем заключаются особенности жидкого состояния?
8. Что называется коэффициентом кинематической вязкости, что он характеризует?
9. В чем состоит метод Стокса определения коэффициента вязкости жидкости?
10. Вывод расчетной формулы.
11. В чем трудность определения коэффициента вязкости непосредственно по формуле Стокса?
12. Почему определяется время движения шарика только на некотором участке, а не вдоль всей трубы?

Приборы и принадлежности.

1. Сосуд с исследуемой жидкостью
2. Свинцовые шарики
3. Секундомер
4. Штангенциркуль
5. Линейка
6. Пинцет

Физическая модель.

1. Жидкость в сосуде вязкая, несжимаемая.

2. Размеры и масса шарика и размер сосуда подбираются так, что жидкость можно считать простирающейся безгранично.
3. Вязкость не зависит от температуры.
4. Рассматриваем равномерное движение шарика в жидкости.
5. Жидкость смачивающая.

Указание по технике безопасности.

Соблюдать осторожность при работе со стеклянными сосудами.

12.1 Явления переноса

Состояние термодинамической системы описывается такими параметрами как концентрация (n), давление (P), температура (T), плотность (ρ) и др. Если эти параметры имеют одинаковые значения в любой точке системы, то система находится в состоянии термодинамического равновесия.

В результате внешних воздействий в макроскопической системе может возникнуть пространственная неоднородность температуры, плотности, скорости движения слоев, и т.д. Такое состояние называется неравновесным. Если неравновесную систему предоставить самой себе, то с течением времени она приходит в состояние термодинамического равновесия. При этом в системе происходят необратимые процессы, в результате которых осуществляется молекулярный перенос какой-либо физической величины из одной части системы в другую. Все эти процессы, имеющие с молекулярной точки зрения сходный механизм, часто объединяют под общим названием *явлений переноса*.

К *явлениям переноса* относятся необратимые процессы пространственного переноса энергии (*теплопроводность*), массы (*диффузия*), импульса (*внутреннее трение*).

12.1.1. Теплопроводность

Теплопроводность – это процесс самопроизвольного переноса тепловой энергии от нагретых областей системы к холодным вследствие хаотического движения молекул.

Если в одной области системы средняя кинетическая энергия молекул больше, чем в другой, то с течением времени вследствие постоянных столкновений молекул происходит процесс выравнивания средних кинетических энергий молекул, то есть выравнивание температур.

Теплопроводность возникает при наличии пространственной неоднородности температуры $T=T(x,y,z)$, которая количественно характеризуемой градиентом:

$$\overrightarrow{grad}T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные орты вдоль координатных осей x, y, z соответственно.

Градиент температуры – вектор, направленный по нормали \vec{n} к изотермической поверхности в сторону увеличения температуры и численно равный изменению температуры на единицу длины в направлении этой нормали. Модуль градиента характеризует быстроту изменения температуры в направлении этой нормали (рис. 12.1):

Для одномерного случая, когда температура изменяется только вдоль оси x :

$$\overrightarrow{grad}T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i}.$$

Перенос тепла между слоями газа описывается экспериментальным законом Фурье:

$$\delta Q = -\chi \frac{\partial T}{\partial x} dS_{\perp} dt, \quad (12.1)$$

где δQ – количество теплоты, которое проходит за время dt через площадку dS_{\perp} , расположенную перпендикулярно направлению переноса внутренней энергии. Коэффициент пропорциональности χ называется **коэффициентом теплопроводности**. Молекулярно-кинетическая теория показывает, что

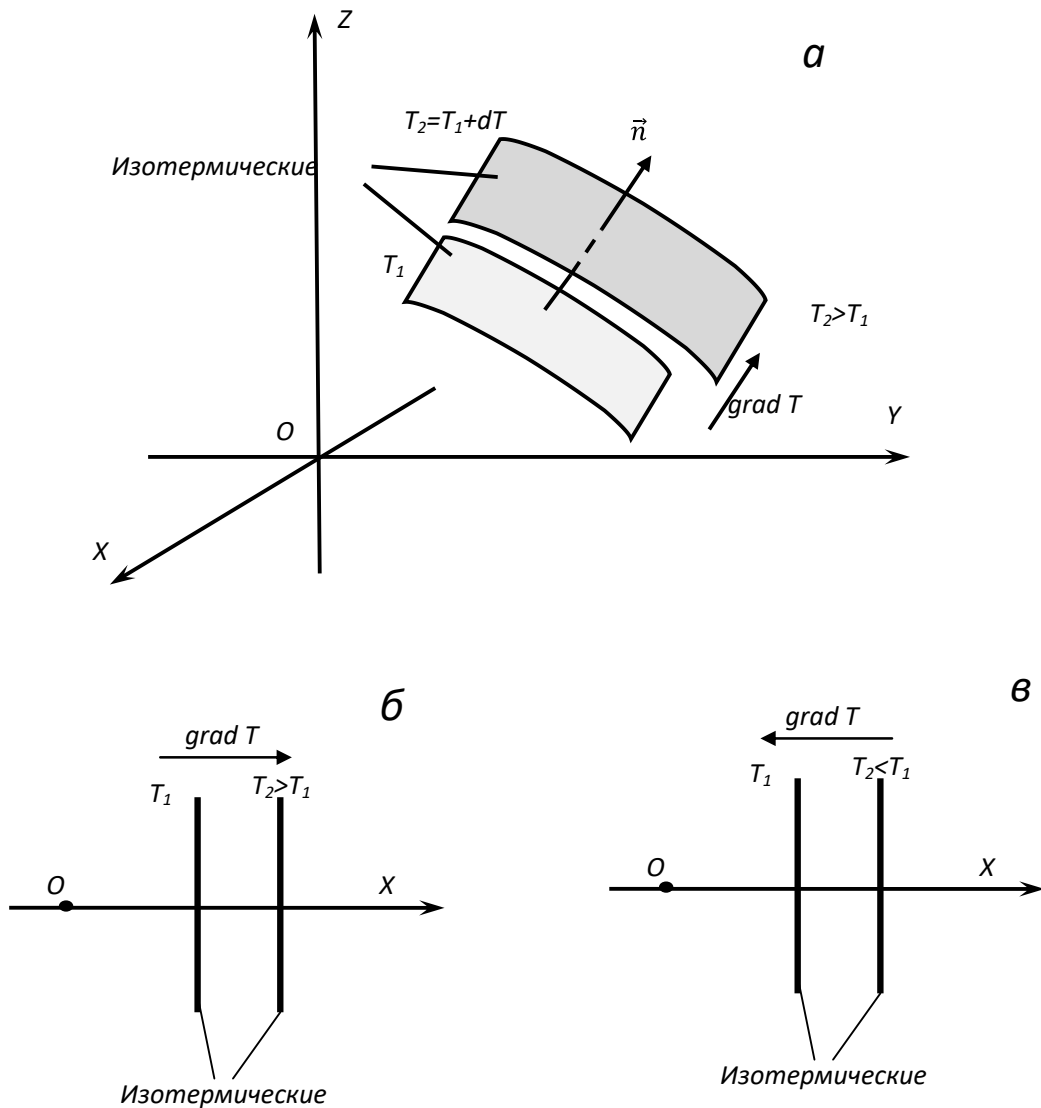


Рисунок 12.1.

коэффициент теплопроводности зависит от рода газа и определяется следующим выражением:

$$\chi = \frac{1}{3} c_V \rho \langle v \rangle \langle \lambda \rangle, [\chi] = \frac{Вт}{м \cdot К} \quad (12.2)$$

где c_V – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме (количество теплоты, необходимое для нагревания 1кг газа на 1К при постоянном объеме), ρ – плотность газа, $\langle v \rangle$ – средняя скорость теплового движения молекул, $\langle \lambda \rangle$ – средняя длина свободного пробега молекул.

Так как:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \quad c_V = \frac{i}{2} \cdot \frac{R}{M}, \quad \rho = \frac{MP}{RT}, \quad (12.3)$$

где P – давление газа, R – молярная газовая постоянная, то коэффициент теплопроводности χ обратно пропорционален квадратному корню из молярной массы M . Следовательно, лучшими проводниками тепла являются легкие газы, по сравнению с тяжелыми.

Знак минус в формуле (12.1) указывает на то, что при теплопроводности перенос внутренней энергии происходит в направлении убывания температуры.

12.1.2. Диффузия

Диффузия – это процесс самопроизвольного переноса массы из одной области системы в другую вследствие молекулярного движения.

При диффузии происходит самопроизвольное перемешивание молекул двух соприкасающихся газов, жидкостей и даже твердых тел.

Диффузия возникает при наличии градиента плотности вещества $\overrightarrow{grad\rho} = \frac{\partial\rho}{\partial x} \vec{i}$ (в одномерном случае) и описывается экспериментальным законом Фика:

$$dm = -D \frac{\partial\rho}{\partial x} dS_{\perp} dt, \quad (12.4)$$

где dm – масса вещества, перенесенная в результате диффузии через площадку dS_{\perp} , перпендикулярную оси x , за время dt . Величина D называется

коэффициентом диффузии и зависит от рода вещества. Молекулярно-кинетическая теория связывает коэффициент диффузии с параметрами газа:

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle, \quad [D] = \frac{m^2}{c}. \quad (12.5)$$

Коэффициент диффузии, как и коэффициент теплопроводности, обратно пропорционален корню квадратному из молярной массы. Это позволяет использовать газовую диффузию для разделения изотопов.

Знак минус в формуле (12.4) указывает, что перенос вещества при диффузии происходит в направлении убывания плотности.

12.1.3. Внутреннее трение (вязкость)

Внутреннее трение (вязкость) – трение между частями одного и того же тела, например, между различными параллельно движущимися слоями жидкости или газа, скорости которых различны.

Рассмотрим два слоя в потоке газа, скорости которых v_1 и v_2 . Каждая молекула газа участвует в двух движениях: хаотическом со скоростью u и упорядоченном со скоростью v . Скорость v значительно меньше u ($u \approx 10^3$ м/с, в случае мощного урагана $v \approx 10^2$ м/с). Пусть в какой-то момент времени слои обладают импульсами \vec{p}_1 и \vec{p}_2 . Эти импульсы не могут оставаться неизменными, т.к. вследствие хаотического движения происходит непрерывный переход молекул из одного слоя в другой. Попав в соседний слой, молекула отдает избыток своей энергии другим молекулам (если она перешла из слоя с большей энергией) или увеличивает свой импульс за счет других молекул (если она перешла из слоя с меньшей энергией). Вследствие хаотического теплового движения происходит *обмен молекулами между слоями*, в результате чего импульс слоя, движущегося быстрее, уменьшается, а движущегося медленнее – увеличивается (происходит ***перенос импульса*** от одного слоя к другому).

Так как изменение импульса в единицу времени представляет собой силу, действующую на тело, то можно говорить о силе внутреннего трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, действующей на границе между двумя слоями жидкости или газа, модуль которой *определяется законом Ньютона*:

$$F_{\text{тр}} = -\eta \left| \frac{\partial V}{\partial x} \right| dS, \quad (12.6)$$

где η – коэффициент внутреннего трения, называемый *динамической вязкостью* (или коэффициентом динамической вязкости); $\frac{\partial V}{\partial x}$ – градиент скорости, показывающий быстроту изменения скорости в направлении X , перпендикулярном направлению движения слоев (рис. 12.2); dS – площадь, на которую действует сила $F_{\text{тр}}$. Из формулы 12.6 следует, что *коэффициент динамической вязкости численно равен силе трения при единичном*

градиенте скорости и единичной площади соприкосновения.

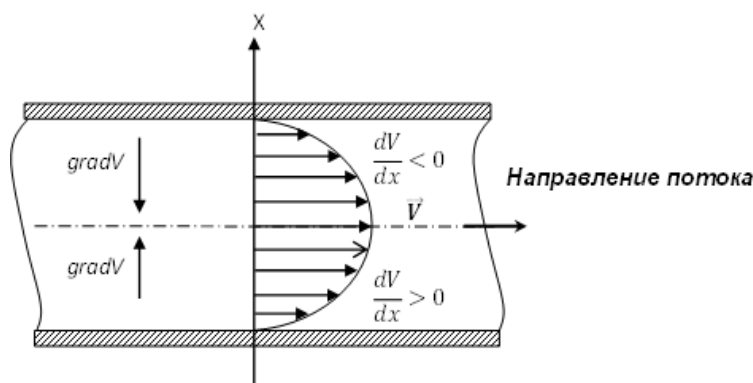


Рисунок 12.2.

Пусть имеются две параллельные друг другу пластины, разделенные слоем среды (жидкости или газа), размеры которых значительно

превосходят расстояние между ними. Нижняя пластина удерживается на месте. Верхняя приводится в движение относительно нижней с некоторой скоростью \vec{V} . Для перемещения верхней пластины с постоянной скоростью \vec{V} необходимо действовать на нее с некоторой постоянной по величине силой \vec{F} . Так как пластина не получает ускорения, значит, действие этой силы уравнивается равной по величине противоположно направленной силой, которая и есть сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. На нижнюю пластину также действует

сила $\vec{F}'_{\text{тр}}$, равная по величине силе $\vec{F}_{\text{тр}}$. То есть между пластинами возникает взаимодействие, которое осуществляется через среду (жидкость или газ), находящуюся между ними. При этом воздействие передается от одного слоя к другому. При этом формула $F_{\text{тр}} = -\eta \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| dS$ определяет силу трения, действующую не только на пластины, но и силу трения между соприкасающимися слоями жидкости. Знак минус в формуле указывает на то, что импульс переносится в направлении убывания скорости.

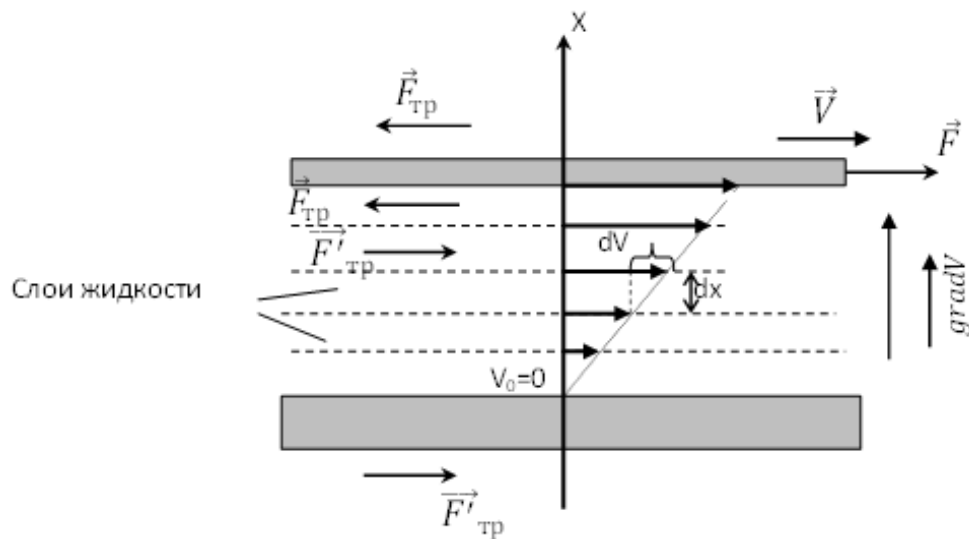


Рисунок 12.3.

Согласно молекулярно-кинетической теории динамическая вязкость определяется свойствами газа – плотностью ρ газа, скоростью молекул $\langle v \rangle$ и длиной свободного пробега $\langle \lambda \rangle$, которые зависят от температуры:

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle \lambda \rangle. \quad (12.7)$$

Законы, описывающие явления переноса были установлены опытным путем. Позже они были выведены из молекулярно-кинетической теории газов.

Из сопоставления формул, описывающих явления переноса, видно сходство молекулярной природы этих процессов. Все коэффициенты переноса зависят от характеристик теплового движения молекул (средней скорости и длины свободного пробега).

Формулы (12.2), (12.5) и (12.7) связывают коэффициенты переноса и характеристики теплового движения молекул. Из этих формул вытекают простые зависимости между χ , D и η :

$$\eta = \rho D, \quad \frac{\chi}{\eta c_V} = 1.$$

Используя эти формулы, можно по найденным из опыта одним величинам определить другие.

12.2. Особенности жидкого состояния

Вязкость газов может быть рассчитана с помощью методов, основанных на теоретических предпосылках, но для определения вязкости жидкостей аналогичной теоретической базы не существует.

Жидкости занимают промежуточное положение между газообразным и твердым состояниями. Жидкости, как и твердые тела, относятся к конденсированным средам: их молекулы находятся в непосредственной близости друг к другу. В то же время, плотная упаковка молекул не мешает жидкости принимать любую форму, в какую бы ее не поместили. Как твердое тело, жидкость почти несжимаема и очень прочна на разрыв при всестороннем расширении, но как газ – передает давление по всем направлениям одинаково, без характерной для кристалла анизотропии.

Столь противоречивые свойства жидкости можно объяснить лишь тем, что агрегатное состояние жидкости реализуется в таком температурном интервале, когда энергия теплового движения молекул достаточна для разрушения кристаллической структуры, но еще мала для полного разрыва связей, удерживающих молекулы в пределах конечного объема. Рентгеноструктурные исследования показывают, что в жидкости существует так называемый ближний порядок в расположении молекул и отсутствует дальний.

Средние расстояния между молекулами в жидкости близки к расстоянию, соответствующему минимальному значению энергии взаимодействия, т.е. равновесию. Молекулы большую часть времени колеблются около своих положений равновесия. В силу хаотичности теплового движения скорости и амплитуды колебаний соседних молекул различны, и время от времени соседние молекулы перескакивают и «застревают» в новых положениях равновесия и начинают колебаться около них. С ростом температуры растет средняя энергия теплового движения, а с ней и амплитуда колебаний и частота перескоков молекул из одного положения равновесия в соседние.

Наиболее ярким свойством жидкости является ее вязкость – появление сил трения между слоями жидкости или газа, движущимися относительно друг друга параллельно и с разными скоростями. Причиной вязкости является наложение упорядоченного движения слоев с различными скоростями V и теплового хаотического движения молекул со скоростями u , зависящими от температуры.

Между поверхностью твердого тела и всякой реальной жидкостью существуют силы молекулярного сцепления, приводящие к тому, что непосредственно прилегающий к стенке слой полностью «прилипает» к ней, т.е. скорость пристеночного слоя равна нулю. Так как молекулы жидкости большую часть времени находятся около положения равновесия, то движущаяся масса жидкости увлекает соседние слои в основном за счет сил сцепления и в меньшей степени за счет перехода молекул из одного слоя в другой. По мере удаления от стенки скорость слоев увеличивается и возникает поток импульса по направлению от жидкости к стенке.

Существует два режима течения жидкостей. Течение называется *ламинарным* (слоистым), если вдоль потока каждый выделенный тонкий слой скользит относительно соседних, не перемешиваясь с ними, и *турбулентным* (вихревым), если вдоль потока происходит интенсивное вихреобразование и перемешивание жидкости (газа).

На рисунке 12.2 показан характер распределения скоростей слоев в сечении трубы при ламинарном (установившемся слоистом) потоке жидкости.

Вязкость жидкости характеризуется *коэффициентами динамической и кинематической вязкости*.

Динамическая вязкость (или коэффициент динамической вязкости) η , зависящий от плотности среды, определяет быстроту передачи импульса от слоя к слою.

В СИ единицей измерения динамического коэффициента вязкости является $1 \text{ Па}\cdot\text{с} = \text{Н}\cdot\text{с}/\text{м}^2 = \text{кг}/\text{м}\cdot\text{с}$.

Кинематическая вязкость (или коэффициент кинематической вязкости) ν не зависит от плотности жидкости и характеризует быстроту выравнивания скорости потока.

Единицей измерения ν в системе СИ является $1 \text{ м}^2/\text{с}$.

Динамическая и кинематическая вязкости связаны соотношением

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}.$$

Вязкость зависит от температуры, причем характер этой зависимости для жидкостей и газов различен. Для жидкостей η с увеличением температуры уменьшается, а для газов, наоборот, увеличивается, что указывает на различие в них механизмов внутреннего трения.

При нагревании жидкость «разрыхляется» за счет увеличения амплитуды колебаний и частоты перехода молекул из одного положения равновесия в другое.

Зависимость динамической вязкости от температуры жидкости определяется формулой:

$$\eta = A \exp\left(\frac{W}{kT}\right), \quad (12.8)$$

где A – коэффициент, зависящий от рода жидкости, ρ – плотность жидкости, k – постоянная Больцмана, W – энергия активации самодиффузии – энергия, которую нужно сообщить молекуле, чтобы она могла перескочить из одного положения равновесия в соседнее, T – температура.

С ростом температуры вязкость жидкости быстро падает. При понижении температуры вязкость большинства жидкостей быстро возрастает. Примером исключения является гелий. При приближении к абсолютному нулю температуры гелий не только не увеличивает своей вязкости, но и переходит в «сверхтекучее» состояние, характеризуемое полным отсутствием вязкости.

12.3. Вывод рабочей формулы

В данной работе коэффициент внутреннего трения вязкой жидкости определяется методом падающего шарика (методом Стокса).

На падающий в жидкости шарик действуют силы (рис. 12.4):

1. Сила тяжести:

$$P = mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{ш}} g, \quad (12.9)$$

где $\rho_{\text{ш}}$ – плотность материала шарика, g – ускорение свободного падения, r – радиус шарика.

2. Выталкивающая сила (Архимеда):

$$F_A = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{ж}} g, \quad (12.10)$$

где $\rho_{\text{ж}}$ – плотность жидкости.

3. Сила сопротивления среды, обусловленная вязкостью, определяемая по формуле Стокса:

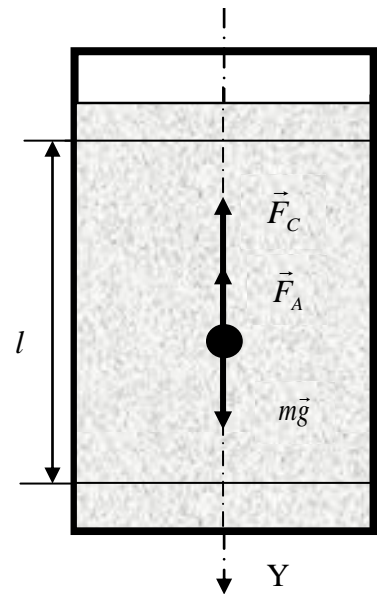


Рисунок 12.4.

$$F_c = 6\pi\eta r v, \quad (12.11)$$

где η – динамический коэффициент вязкости, v – скорость движения шарика.

Согласно II закону Ньютона:

$$\vec{F}_A + \vec{F}_c + m\vec{g} = m\vec{a}, \quad (12.12)$$

Проецируя на ось Y, получим:

$$mg - F_A - F_c = ma,$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_{\text{ш}} - \rho_{\text{ж}})g - 6\pi\eta r v = ma. \quad (12.13)$$

В начале движения, пока скорость падающего шарика мала, он движется ускоренно. Довольно быстро, уже через несколько сантиметров от начала движения, скорость достигнет такого значения v_0 , при котором равнодействующая этих сил обратится в нуль и движения станет равномерным. Тогда:

$$\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_{\text{ш}} - \rho_{\text{ж}})g = 6\pi\eta r v_0. \quad (12.14)$$

Определив опытным путем скорость $v_0 = \frac{l}{t}$, где l – расстояние между двумя метками, пройденное шариками за время t , и зная $\rho_{\text{ж}}$ и $\rho_{\text{ш}}$, можно определить η по формуле:

$$\eta = \frac{2r^2(\rho_{\text{ш}} - \rho_{\text{ж}})gt}{9l}. \quad (12.15)$$

Так как на опыте удобнее определять не радиус r , а диаметр шарика $D=2r$, то формула принимает окончательный вид:

$$\eta = \frac{D^2(\rho_{\text{ш}} - \rho_{\text{ж}})gt}{18l}. \quad (12.16)$$

Кинематическая вязкость исследуемой жидкости определяется по формуле:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho_{ж}}. \quad (12.17)$$

12.4. Описание установки

Установка состоит из цилиндрического сосуда 1 с раствором глицерина (рис.12.5). Сосуд с помощью кронштейнов закреплен на стойке. При падении

шарика в жидкости его скорость вначале возрастает, но через малый промежуток времени становится величиной постоянной. Чтобы рассчитать скорость падения шарика в растворе глицерина, на стенке сосуда указаны две метки, верхняя $M1$ отмечает положение, начиная с которого движение шарика можно считать равномерным.

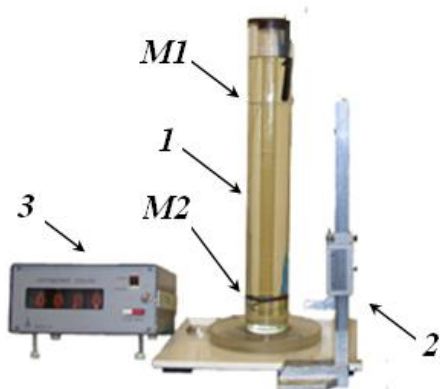


Рисунок 12.5.

В момент похождения шариком верхней метки $M1$ включают секундомер 3, отсчитывающий время движения. В момент прохождения шариком второй метки $M2$ секундомер отключают. Размеры шариков определяют, используя штангенциркуль 2 (или микрометр).

12.5. Порядок выполнения работы

1. Измерить расстояние l между метками на цилиндре с исследуемой жидкостью при помощи миллиметровой линейки. Полученный результат занести в таблицу 12.1.

2. Измерить диаметр D шарика при помощи штангенциркуля (или микрометра). Полученный результат занести в таблицу 12.1.

3. При помощи пинцета осторожно опустить шарик в жидкость как можно ближе к оси цилиндра.

4. Измерить время t прохождения шариком расстояния между метками, для чего:

- нажать кнопку «сброс»
- в момент прохождения шариком метки М1 запустить секундомер кнопкой «отсчет»
- в момент прохождения шариком метки М2 остановить секундомер, отжав кнопку «отсчет»
- записать результат измерения времени t таблицу 12.1.

Таблица 12.1.

№ п/п	$l, м$	$D, м$	$t, с$	$\eta, Па\cdot с$
1				
2				
3				
среднее	-	-	-	$\bar{\eta} =$

5. Опыт повторить 3÷5 раз с другими шариками согласно пунктам 1÷4. Результаты занести в строку таблицы, соответствующую номеру опыта.

6. Рассчитать по формуле (12.16) значения динамической вязкости η для каждого опыта. Найти среднее значение динамической вязкости $\bar{\eta}$. Результаты расчетов занести в таблицу 12.1.

При расчетах необходимо принять:

$$\rho_{ш} = 11340 \frac{кг}{м^3}; \quad \rho_{ж} = 1250 \frac{кг}{м^3}.$$

7. Рассчитать значение кинематической вязкости по формуле (12.17), используя среднее значение динамической вязкости $\bar{\eta}$.

8. Рассчитать относительную ε_{η} и абсолютную $\Delta\eta$ погрешности измерения динамической вязкости по формулам:

$$\varepsilon_{\eta} = \frac{\Delta\eta}{\eta} = 2 \frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta\rho_{ш} + \Delta\rho_{ж}}{\rho_{ш} - \rho_{ж}},$$

$$\Delta\eta = \varepsilon_{\eta}\eta.$$

При расчетах необходимо принять:

$$\Delta\rho_{ш} = 0.5 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad \Delta\rho_{ж} = 0.5 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad \Delta t = 0,01 \text{ с.}$$

Полную абсолютную погрешность измерения диаметра шарика и расстояния между метками принять равными инструментальной погрешности:

$$\text{при использовании линейки} - \Delta l = \Delta l_{\text{инс}} = 0.5 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\text{штангенциркуля} - \Delta D = \Delta D_{\text{инс}} = 0.05 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

10. Рассчитать погрешности кинематической вязкости по формулам:

$$\varepsilon_{\nu} = \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta\eta}{\eta} + \frac{\Delta\rho_{ж}}{\rho_{ж}},$$

$$\Delta\nu = \varepsilon_{\nu}\nu.$$

11. Определить процентное содержание глицерина в исследуемом растворе, используя график (рис.12.6) зависимости вязкости водного раствора от процентного содержания в нем глицерина.

12. Окончательный результат записать в виде:

$$\eta = (\eta \pm \Delta\eta) \text{ Па}\cdot\text{с, при } \varepsilon_{\eta} = \dots \%$$

$$\nu = (\nu \pm \Delta\nu) \text{ м}^2/\text{с, при } \varepsilon_{\nu} = \dots \%$$

Содержание глицерина в растворе оставляет ... %

13. Проанализировать полученные результаты и сделать выводы.

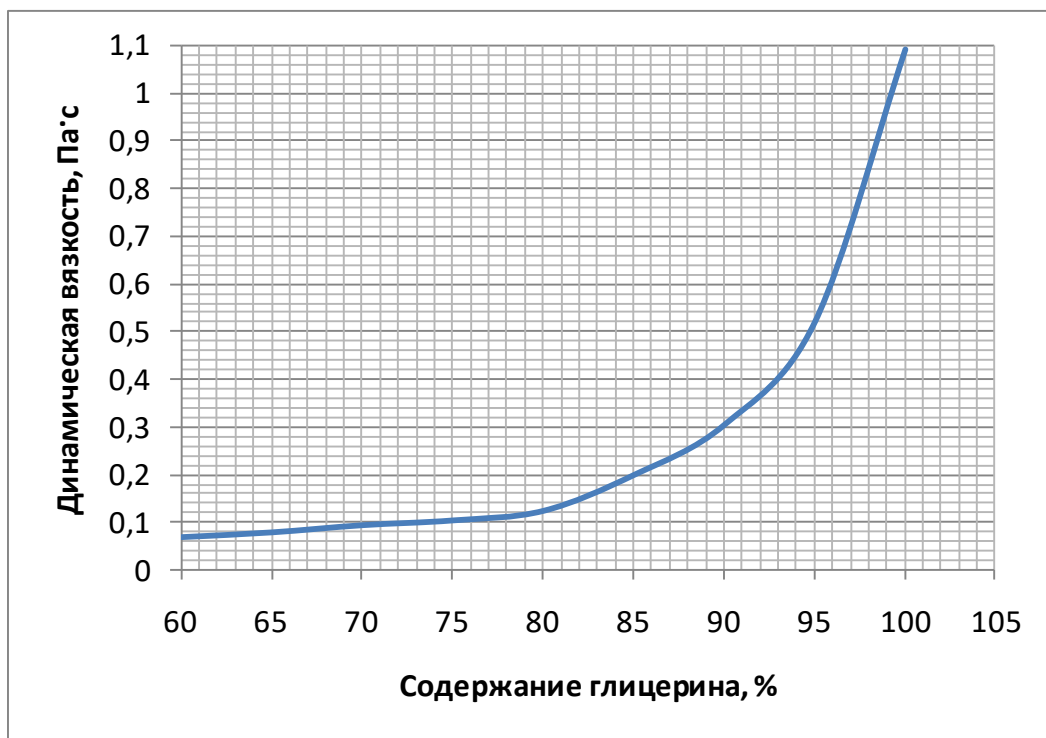


Рисунок 12.6.

13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛОТЫ ИСПАРЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Цель работы.

1. Изучить процессы при испарении жидкости.
2. Изучить методику определения теплоты испарения жидкости.
3. Определить теплоту испарения жидкости.

Список литературы.

1. Савельев И.В. Курс общей физики, т.1, М.: Наука, 1977.
2. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике, М.: Наука, 1985.
3. Базаров И.П. Термодинамика, М.: Высшая школа, 1991.

Вопросы к зачету.

1. Что такое фазовые переходы первого рода?
2. Объяснить явление испарения жидкости.
3. Объяснить разницу между процессами кипения и испарения.
4. Что такое теплота кипения, испарения?
5. Что такое кривая равновесного кипения, критическая точка?
6. Записать уравнение Клапейрона–Клаузиуса, и дать ему объяснение.
7. Какие приближения принимаются при выводе рабочей формулы?
8. Вывести рабочую формулу.

Указание по технике безопасности.

1. Соблюдать осторожность при работе со стеклянными сосудами.
2. Соблюдать осторожность при работе с жидкостями.

13.1. Теоретическая часть

Кипение жидкости и конденсации пара служат примерами фазовых переходов I рода.

Характерная особенность всех фазовых переходов I рода состоит в том, что в этих процессах одновременно постоянны давление и температура, но зато изменяется соотношение между массами двух фаз. Изменяется плотность, фазовый объем, энтропия тела. Второй особенностью этих процессов является то, что для их осуществления необходимо подводить к системе или отводить от нее некоторое количество теплоты, называемое **теплотой фазового перехода**.

К фазовым переходам I рода относится **процесс парообразования** – переход вещества из конденсированной фазы (жидкой или твердой) в газообразную. В жидкостях различают два вида парообразования: кипение и испарение.

Испарение – это парообразование со свободной поверхности жидкости. Испарение происходит при любой температуре и возрастает при ее повышении. Механизм испарения можно объяснить следующим образом. Молекула жидкости, находящаяся на поверхности вещества, втягивается вовнутрь силами межмолекулярного взаимодействия, удерживающими ее на поверхности. Для того чтобы эта частица могла покинуть поверхность вещества ее кинетическая энергия должна быть больше работы, которую нужно совершить, чтобы преодолеть силы межмолекулярного взаимодействия. Отсюда следует, что покинуть поверхность вещества могут не любые молекулы, а наиболее быстрые, из-за чего средняя энергия вещества уменьшается и температура понижается. Поэтому при испарении происходит охлаждение жидкости. Процесс испарения происходит тем интенсивнее, чем выше температура жидкости.

Кипение – интенсивное испарение жидкости, происходящее не только с ее свободной поверхности, но и во всем объеме жидкости внутри образующихся при этом пузырьков пара. Пузырьки пара в кипящей жидкости

быстро увеличивают свои размеры, всплывают на поверхность и лопаются. С этим связано характерное бурление кипящей жидкости. Давление P внутри газового пузырька, находящегося в жидкости, складывается из внешнего давления P_0 , гидростатического давления $P_{\text{ж}}$ выше лежащих слоев жидкости и добавочного давления ΔP , которое выражается поверхностным натяжением.

Для того чтобы поддерживать температуру жидкости при кипении постоянной, необходимо постоянно подводить определенное количество теплоты. Эта теплота носит название **теплоты испарения**. Передача этого количества теплоты жидкости идет не на повышение ее температуры, а к совершению работы, затрачиваемой при испарении.

Одновременно с процессами испарения и кипения происходит обратный процесс – **конденсация** пара. Молекулы пара, попадая в слой жидкости и оставаясь в ней, приносят избыточную энергию в виде теплоты. Процессы испарения и конденсации протекают одновременно, но их количественное соотношение определяется внешними условиями.

Так, в открытом сосуде преобладает процесс испарения, а в закрытом устанавливается равновесие процессов испарения и конденсации. Такое динамическое равновесие объясняется тем, что число молекул, вырывающихся за единицу времени из жидкости и переходящих в паровую фазу, равно числу молекул пара, возвращающихся в жидкость за то же время. Таким образом, непрерывно совершаются два взаимно компенсирующие друг друга процесса - испарение жидкости и конденсация пара. Пар,

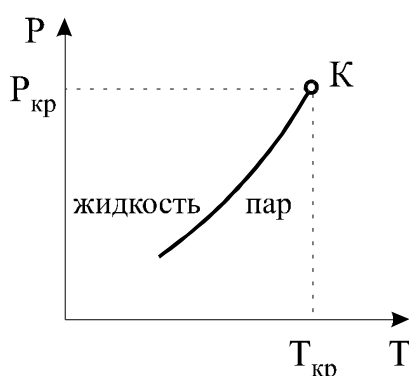


Рисунок 13.1.

находящийся в таком равновесном состоянии, называется **насыщенным**.

Молекулы насыщенного пара, сталкиваясь со стенками сосуда, оказывают на стенки сосуда давление, которое называется давлением насыщенного пара. Опыт

показывает, что давление насыщенного пара зависит от химической природы жидкости и температуры. Если в сосуде, в котором наблюдается равновесное состояние, присутствуют несколько химически не взаимодействующих газов, то давление в сосуде будет находиться как сумма парциальных давлений (закон Дальтона). **Парциальным давлением** называют такое давление, которое создает газ при отсутствии других газов, при тех же объеме и температуре. Плотность (давление) насыщенного пара очень быстро возрастает с ростом температуры. Плотность жидкости при повышении температуры убывает за счет ее теплового расширения. При некоторой температуре $T_{кр}$ плотности жидкости и пара сравниваются и граница, разделяющая эти фазы, исчезает. Это соответствует **критическому состоянию** двухфазной системы, когда обе равновесно сосуществующие фазы становятся тождественными по всем своим свойствам. Точка «К» на фазовой диаграмме, соответствующая критическому состоянию, называется критической точкой, а параметры системы в этой точке – **критическими параметрами** ($T_{кр}$, $P_{кр}$ на рис 13.1).

Испарение возможно при всех температурах сосуществования конденсированной и газовой формы, кипение – в интервале от $T_{тр}$ (температуры тройной точки) до критической $T_{кр}$. Выше $T_{кр}$ говорить об испарении бессмысленно, так как плотности насыщенного пара и жидкости равны, следовательно нельзя разграничить жидкую фазу и пар.

13.2. Вывод рабочей формулы

Испарение и конденсация относятся к фазовым превращениям первого рода. Количественно эти превращения описываются уравнением Клапейрона–Клаузиуса:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{1}{T} \cdot \frac{\lambda}{V_{г} - V_{ж}}, \quad (13.1)$$

где dP – изменение давления насыщенного пара над жидкостью при

изменении ее температуры на dT ; T – температура жидкости; λ – теплота испарения; V_r – объем, который должен занимать пар при полном испарении жидкости и находящийся при давлении насыщения; $V_{ж}$ – объем жидкости до испарения.

Вид формулы (13.1) не зависит от рода жидкости. Для простоты расчетов и для обобщения будем считать для 1 моля жидкости. Объем 1 моля пара при давлении насыщения существенно больше объема 1 моля жидкости при таких же условиях ($V_r \gg V_{ж}$). Следовательно в формуле (13.1) мы можем пренебречь величиной $V_{ж}$. Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{1}{T} \cdot \frac{\lambda}{V}, \quad (13.2)$$

где V – объем 1 моля пара находящийся при давлении насыщенных паров; λ – теплота испарения 1 моля жидкости при температуре T .

Считая насыщенный пар идеальным газом, из уравнения *Менделеева–Клапейрона* найдем значение объема молярной массы газа при давлении насыщения:

$$V = \frac{RT}{P}. \quad (13.3)$$

Подставляя формулу (13.3) в (13.2) получаем дифференциальное уравнение, определяющее зависимость давления насыщенного пара для данной жидкости от температуры:

$$\frac{dP}{P} = \frac{\lambda}{R} \cdot \frac{dT}{T^2}. \quad (13.4)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\ln(P) = -\frac{\lambda}{RT} + C. \quad (13.5)$$

Для того, чтобы определить молярную теплоту испарения λ и исключить постоянную интегрирования C из уравнения (13.5) необходимо измерить равновесное состояние давление пара P_1 и P_2 при двух температурах T_1 и T_2 . Тогда решение можно записать в виде двух уравнений:

$$\ln(P_1) = -\frac{\lambda}{RT_1} + C_1.$$

$$\ln(P_2) = -\frac{\lambda}{RT_2} + C_2.$$

Вычитая второе уравнение из первого, получим соотношение:

$$\ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) = -\frac{\lambda}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right). \quad (13.6)$$

Отсюда получим выражение для определения молярную теплоту испарения λ :

$$\lambda = \frac{RT_1T_2}{T_1 - T_2} \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right). \quad (13.7)$$

Так как для измерения давления в этой работе используется дифференциальный манометр и следовательно давления можно выразить:

$$P_1 = \rho gh_1,$$

$$P_2 = \rho gh_2.$$

Отсюда, отношение давлений можно заменить на отношение уровней манометра:

$$\ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) = \ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right).$$

Расчетная формула для теплоты испарения будет иметь вид:

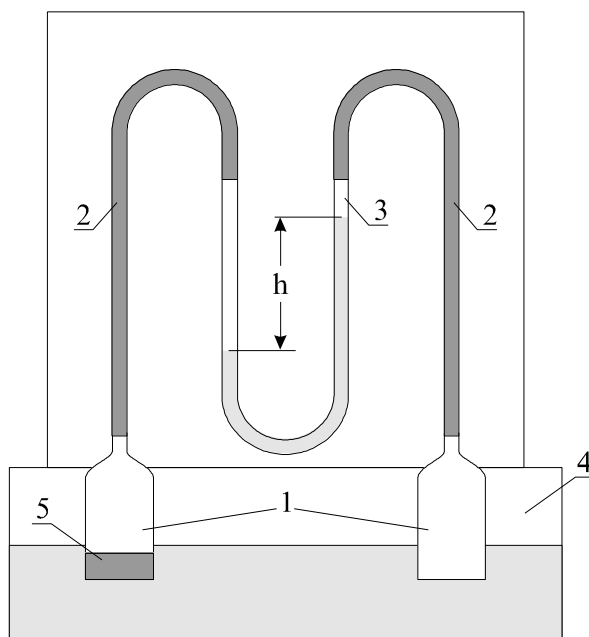
$$\lambda = \frac{RT_1T_2}{T_1 - T_2} \ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right). \quad (13.8)$$

13.3. Описание установки

Приборы и принадлежности:

1. термостат;
2. дифференциальный манометр;
3. термометр;
4. линейка.

Схема установки



- 1 – герметичные сосуды;
- 2 – резиновые шланги;
- 3 – дифференциальный манометр;
- 4 – термостат;
- 5 – исследуемая жидкость.

Принцип действия установки

Установка для измерения теплоты испарения жидкости состоит из двух герметично закрытых сосудов (1) (рис. 13.2), соединенных резиновыми шлангами (2) с дифференциальным манометром (3). Сосуды размещены в термостате (4). Температура в термостате определяется с помощью

термометра с ценой деления $0,1\text{ }^{\circ}\text{C}$. Термостатирование производится с помощью воды. В один из сосудов находится исследуемая жидкость (5). Такая конструкция позволяет измерять парциальное давление пара исследуемой жидкости при различных температурах. При этом исключаются влияния внешнего давления и термического состояния воздуха в этих сосудах. Выбор исследуемой и эталонной жидкостей сделан так чтобы они не растворялись друг в друге (вакуумное масло и этанол).

13.4. Порядок проведения эксперимента

1. Снять имеющуюся в начальный момент разность уровней h_1 манометра. Отсчет снять по шкале манометра в мм.
2. Записать разность уровней h_1 манометра в таблицу 13.1.
3. Перевести значение разности уровней в метры, и записать в таблицу 13.1.
4. Записать температуру начального состояния T_1 в $^{\circ}\text{C}$ таблицу 13.1.
5. Перевести значение температуры в К, и записать в таблицу 13.1.
6. Повторить пункты 1 – 5 три раза.

Таблица 13.1

№ п/п	$h_1, 10^{-3}\text{ м}$	$h_1, \text{ м}$	$\Delta h_1, \text{ м}$	$T_1, ^{\circ}\text{C}$	$T_1, \text{ К}$	$\Delta T_1, \text{ К}$
1						
2						
3						
ср.						

7. Слить воду из термостата с помощью шланга.
8. Залить воду в термостат, руководствуясь такими соображениями: если температура $T_1 \geq 19\text{ }^{\circ}\text{C}$, то следует налить холодной воды так, чтобы температура воды в термостате опустилась на $\sim 10\text{ }^{\circ}\text{C}$. Если же $T_1 \leq 16\text{ }^{\circ}\text{C}$, то необходимо долить горячей воды так, чтобы температура воды в термостате

поднялась на $\sim 10^{\circ}\text{C}$.

9. Перемешать воду в термостате. Через 20 минут после смены воды можно приступить к измерению данных h_2 и T_2 .

10. Повторить измерения согласно пунктам 1-6, записывая соответственно значения h_2 и T_2 в таблицу 13.2.

Таблица 13.2

№ п/п	$h_2, 10^{-3} \text{ м}$	$h_2, \text{ м}$	$\Delta h_2, \text{ м}$	$T_2, ^{\circ}\text{C}$	$T_2, \text{ К}$	$\Delta T_2, \text{ К}$
1						
2						
3						
ср.						

11. Согласно данным полученным в таблицах 13.1 и 13.2 рассчитать значение теплоты испарения, используя формулу (13.8).

12. Выведа формулу для учета погрешности (13.9), рассчитать погрешность $\Delta\lambda$, используя средние значения для величин температуры и уровня.

$$\varepsilon_{\lambda} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{\text{н}}} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta T_1}{T_{1\text{н}}} + \frac{\Delta T_2}{T_{2\text{н}}} + \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{T_{1\text{н}} - T_{2\text{н}}} + \frac{\Delta h_1 h_{2\text{н}} + \Delta h_2 h_{1\text{н}}}{h_{1\text{н}} h_{2\text{н}} \ln\left(\frac{h_{1\text{н}}}{h_{2\text{н}}}\right)}. \quad (13.9)$$

$$\Delta\lambda = \varepsilon_{\lambda} \cdot \lambda_{\text{н}}. \quad (13.10)$$

13. Окончательный результат записать в виде:

$$\lambda = (\lambda_{\text{н}} \pm \Delta\lambda) \frac{\text{Дж}}{\text{моль}} \quad (13.11)$$

13.5 Оформление отчета

Результаты выполнения лабораторной работы представляются в виде отчета оформленного в соответствии с требованиями ГОСТ на техническую документацию. **Отчет должен содержать:**

Титульный лист с названием работы (образец оформления титульного листа см. в приложении).

Цель работы.

Перечень приборов и принадлежностей.

Описание и схему лабораторной установки (см. Рисунок 13.2).

Физическую модель изучаемого явления. В качестве физической модели принято:

1. жидкость однокомпонентная;
2. молярный объем жидкости пренебрежимо мал по сравнению с молярным объемом пара;
3. жидкость несжимаема;
4. насыщенный пар принимается за идеальный газ;
5. жидкость несмачиваемая.

Математическую модель изучаемого явления. В качестве математической модели приняты выражения (13.1) и (13.3). Формулы для расчета теплоты испарения исследуемой жидкости соответственно (13.8) и относительной погрешности теплоты испарения (13.9).

Таблицы результатов измерений.

Значения используемых величин. Для расчета необходимо взять:

$$R = 8.31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$$

$$\Delta R = 0.005 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$$

Результаты вычисления измеряемых величин и их погрешности.

Выводы.

14. ИЗМЕРЕНИЕ ПОСТОЯННОЙ АДИАБАТЫ ВОЗДУХА

Цель работы.

1. Изучить первое начало термодинамики.
2. Изучить теорию теплоемкостей.
3. Изучить адиабатический процесс в газе.
4. Освоить метод определения отношения теплоемкостей и получить численное значение этого отношения.

Список литературы.

1. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики, гл. 9, М.: Высшая школа, 1989.
2. Трофимова Т.И. Курс физики, §§ 52-55, М.: Высшая школа, 2003.
3. Зисман Г.А., Тодес О.М. Курс общей физики, т. 1, М.: Наука, 1969.

Порядок теоретической подготовки к выполнению работы.

Изучить и законспектировать в тетрадь ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы.

1. Что называют внутренней энергией системы?
2. Дайте термодинамические определения работы и теплоты.
3. Что такое функция состояния, функция процесса? Приведите примеры.
4. Сформулируйте первое начало термодинамики.
5. Дайте определение теплоемкости системы, удельной и молярной теплоемкости. Как они связаны между собой?
6. Что называется числом степеней свободы молекулы?
7. Сформулируйте закон о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекулы.

8. Какие процессы называются адиабатическими, и какими двумя способами их можно осуществить?
9. За счет чего совершается работа при адиабатическом расширении газа?
10. Вывод рабочей формулы.

Приборы и принадлежности.

1. Микроманометр.
2. Насос ручной.
3. Труба стеклянная запаянная.

Указания по технике безопасности:

Соблюдать осторожность при работе со стеклянными сосудами.

Отчёт по лабораторной работе должен содержать:

1. Цель работы
2. Приборы и принадлежности к работе
3. Схему лабораторной установки
4. Физическую модель
5. Математическую модель
6. Таблицы результатов измерений
7. Результаты расчётов и погрешности
8. Выводы

14.1. Введение

Совокупность макроскопических тел, которые обмениваются энергией как между собой, так и с внешней средой, называется *термодинамической системой*. Величины, характеризующие состояние системы (давление, объем, температура и др.) называются *термодинамическими параметрами*

системы. Переход системы из одного состояния в другое называется *термодинамическим процессом*.

Термодинамика количественно изучает процессы превращения энергии внутри термодинамической системы, не рассматривая внутреннее строение изучаемой системы и характер движения отдельных ее частиц. Соотношения между разными видами энергии позволяют изучать физические свойства исследуемой системы при самых разнообразных процессах, в которых участвует данная система.

Полная энергия термодинамической системы складывается из кинетической энергии механического движения системы, потенциальной энергии системы во внешнем поле (например, в гравитационном) и внутренней энергии U , зависящей только от внутреннего состояния системы. Мы будем рассматривать только неподвижные системы, которые не подвержены действию внешних полей. Для таких систем значение полной энергии совпадает со значением внутренней энергии U .

Внутренняя энергия системы U равна сумме всех видов энергий движения и взаимодействия частиц, составляющих данную систему. Следовательно, в понятие внутренней энергии включается:

- кинетическая энергия хаотического движения молекул;
- потенциальная энергия взаимодействия между молекулами;
- внутримолекулярная энергия (энергия химических связей, ядерная энергия и т.п.).

Внутренняя энергия – однозначная *функция состояния* системы. Это означает, что в каждом определенном состоянии система имеет определенное значение внутренней энергии, и это значение не зависит от того, посредством каких процессов система приведена в это состояние.

Обмен энергией между термодинамической системой и окружающими ее телами, т.е. изменение внутренней энергии системы, может осуществляться двумя качественно различными способами:

- путем совершения работы;

- путем теплообмена.

Энергия, передаваемая системе первым способом называется *работой*, совершаемой над системой. Энергия, передаваемая системе путем теплообмена, называется *теплотой*. В отличие от внутренней энергии, которая является однозначной *функцией состояния* системы и не зависит от того, в результате каких процессов система переведена из начального состояния в конечное, работа и теплота имеют смысл только в связи с конкретным процессом изменения состояния системы, т.е. являются *функциями процесса*.

14.2. Внутренняя энергия идеального газа

Идеальным газом называется такой газ, в котором силы взаимодействия между составляющими его частицами пренебрежимо малы (потенциальной энергией взаимодействия между молекулами можно пренебречь), а сами частицы можно считать материальными точками. При этом столкновения частиц друг с другом и со стенками сосуда происходят по законам абсолютно упругого удара. Физически — это модель маленьких упругих шариков, хаотически движущихся во всем доступном им объеме и взаимодействующих лишь при непосредственном соприкосновении.

Согласно основному уравнению молекулярно-кинетической теории идеального газа давление идеального газа определяется кинетической энергией поступательного движения молекул:

$$p = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle, \quad (14.1)$$

здесь n — концентрация молекул, $\langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle$ — средняя кинетическая энергия поступательного движения, приходящаяся на одну молекулу.

Это уравнение имеет сходство с уравнением *Менделеева–Клапейрона*, которое является уравнением состояния идеального газа:

$$pV = \nu RT, \quad (14.2)$$

где $\nu = m/M$ – количество вещества (число молей). Преобразуем (14.2). Газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль·К) связана с постоянной Больцмана $k = 1,38$ Дж/К и числом Авогадро $N_a = 6,02$ моль⁻¹ соотношением:

$$R = kN_a. \quad (14.3)$$

Далее используем то, что число молекул N , содержащихся в ν молях газа равно:

$$N = \nu N_a, \quad (14.4)$$

а концентрация молекул есть $n = N/V$. В итоге приходим к следующей форме уравнения Менделеева–Клапейрона:

$$p = nkT. \quad (14.5)$$

Сравнивая уравнения (14.1) и (14.5), находим энергию поступательного движения молекул как:

$$\langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle = \frac{3}{2} kT. \quad (14.6)$$

Из формулы (14.6) видно, что средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул газа прямо пропорциональна его абсолютной температуре T . Следовательно, *молекулярно-кинетический смысл абсолютной температуры газа T состоит в том, что она служит мерой средней кинетической энергии поступательного движения молекул.*

Молекулы, состоящие из более чем одного атома, могут двигаться не только поступательно, но и совершать колебательное и вращательное движения, которые также связаны с некоторым запасом энергии. Вращательное движение одноатомной молекулы не имеет смысла, т. к. по определению идеального газа такая молекула является материальной точкой,

т. е. не имеет размеров. Прежде чем перейти к вопросу об энергиях вращения и колебания молекул, рассмотрим понятие числа степеней свободы молекулы.

Любую молекулу можно рассматривать, как физическое тело, состоящее из системы материальных точек (атомов). При описании движения любого тела необходимо знать его положение относительно выбранной системы координат. Число независимых координат, которые полностью определяют положение тела в пространстве, называется *числом степеней свободы тела*.

Положение материальной точки в пространстве определяется тремя координатами. Поэтому одноатомные молекулы (состоят из одного атома – материальной точки) имеют три поступательные степени свободы ($i_{\text{пост}} = 3$). Это, например, молекулы аргона Ar, гелия He и др.

Жесткие двухатомные молекулы (расстояние между атомами остается неизменным) имеют пять степеней свободы (см. рис. 14.1):

три поступательные степени свободы ($i_{\text{пост}}=3$), связанные с поступательным движением вдоль осей OX , OY , OZ и две вращательные степени свободы вращения ($i_{\text{вр}}=2$), обусловленные вращением вокруг осей OX и OZ . Вращением молекулы вокруг

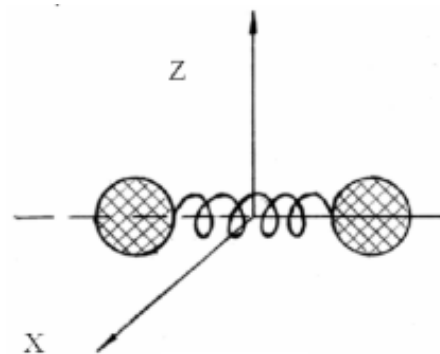


Рисунок 14.1.

оси OY можно пренебречь, т.к. ее момент инерции относительно этой оси пренебрежимо мал (в нашей модели равен нулю). При условиях, близких к нормальным, жесткими двухатомными молекулами являются, например, молекулы водорода H_2 и азота N_2 . Молекулы, состоящие из трех и более жестко связанных атомов, не лежащих на одной прямой, имеют шесть степеней свободы: $i_{\text{пост}}=3$ и $i_{\text{вр}}=3$.

В случае, когда расстояние между молекулами может изменяться (на рис.14.1 это схематично изображено в виде пружины), появляются

дополнительные колебательные степени свободы. Для двухатомной молекулы – одна колебательная степень свободы вдоль оси OY .

Все молекулы, независимо от числа атомов, имеют три поступательных степени свободы. Так как они равноправны между собой, то на основании (6) можно заключить, что на каждую из трех поступательных степеней свободы приходится в среднем одинаковая энергия:

$$\frac{\langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle}{3} = \frac{1}{2} kT.$$

В статистической физике доказывается закон Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы: в состоянии теплового равновесия на каждую вращательную и поступательную степень свободы молекулы приходится в среднем кинетическая энергия, равная $\frac{1}{2} kT$, а на колебательную степень свободы – kT .

Колебательная степень свободы обладает двойной энергетической емкостью, так как колебательное движение обладает как кинетической энергией, так и потенциальной энергией упругой деформации, причем их средние значения равны между собой. Таким образом, согласно закону о равномерном распределении энергии молекул по степеням свободы, средняя энергия молекулы равна:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT, \quad (14.7)$$

где i – сумма числа поступательных, вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы:

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}}. \quad (14.8)$$

Говоря о колебательных степенях свободы, нужно отметить, что энергия колебаний становится существенной только при достаточно высоких температурах (порядка несколько тысяч градусов Кельвина). Поэтому для

температур порядка комнатной ($T \approx 300$ К) под величиной i имеют в виду сумму числа поступательных и вращательных степеней свободы: $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}}$.

Молекулы идеального газа не взаимодействуют друг с другом, поэтому его внутренняя энергия складывается из кинетических энергий отдельных молекул:

$$U = N\langle \epsilon \rangle, \quad (14.9)$$

где N – число молекул.

Заменив в (14.9) среднюю энергию одной молекулы по формуле (14.7), а число молекул по формуле (14.4) и учтя, что произведение постоянной Больцмана на число Авогадро дает универсальную газовую постоянную (14.3), получаем:

$$U = \frac{i}{2} \nu RT. \quad (14.10)$$

Из (14.10) следует, что *внутренняя энергия идеального газа не зависит от давления и объема, а определяется природой газа и его температурой.*

14.3. Работа в термодинамике

Рассмотрим газ, находящийся в сосуде, закрытом плотно пригнанным поршнем (рис.14.2). Газ очень медленно начинает расширяться и перемещает поршень на расстояние dx , настолько малое, что давление газа p можно считать в течение процесса расширения неизменным. Газ, действуя на поршень с силой $F = pS$, совершает при расширении над поршнем элементарную работу $\delta A = F \cdot dx \cdot \cos(0^\circ) = pSdx$. Но Sdx представляет собой приращение объема газа dV . Поэтому выражение для элементарной работы можно записать следующим образом:

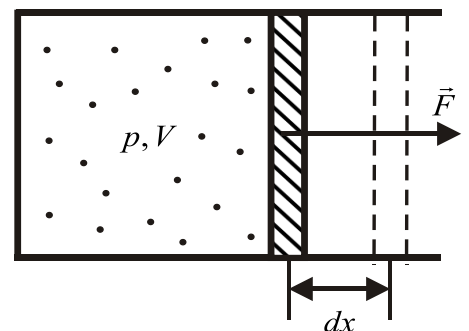


Рисунок 14.2.

$$\delta A = p dV. \quad (14.11)$$

Работа, совершаемая газом при изменении его объема от V_1 до V_2 , вычисляется путем интегрирования выражения (14.11):

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (14.12)$$

Геометрический смысл интеграла (14.12) – площадь на (p, V) – диаграмме. Элементарная работа $\delta A = p dV$ равна площади выделенного на рис. 14.3 прямоугольника. Полная работа газа при изменении его объема от

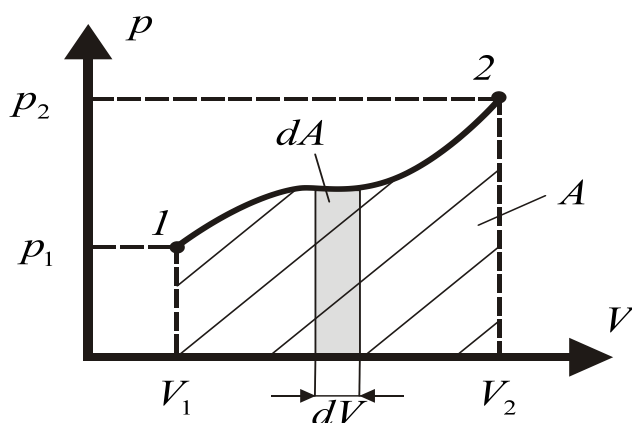


Рисунок 14.3.

V_1 до V_2 равна площади, заштрихованной криволинейной трапеции. Из рисунка видно, что эта площадь зависит не только от параметров начального и конечного состояний системы, т.е. положения точек (p_1, V_1) и (p_2, V_2) , но и от того, как происходит переход, т. е. каким

образом изменяется давление при изменении объема (вида кривой $p = p(V)$).

При расширении газа ($dV > 0$) работа положительна $\delta A > 0$, при сжатии ($dV < 0$) работа отрицательна $\delta A < 0$.

Из курса механики известно, что работа против внешних сил совершается только за счет энергии системы. В нашем случае сосуд с газом покоится, то есть кинетическая и потенциальная энергия рассматриваемой нами термодинамической системы как целого остается неизменной. Поэтому работа против внешних сил может совершаться только за счет убыли внутренней энергии U системы.

Работа A , совершаемая системой над внешними телами – это количественная мера изменения энергии термодинамической системы при ее переходе из одного состояния в другое. Совершение работы сопровождается

перемещением внешних тел (например, поршня), воздействующих на систему. Таким образом, работа представляет собой процесс передачи энергии упорядоченного движения.

Работу, совершаемую внешними телами над системой, обозначим буквой A' . Очевидно, что для одного и того же процесса $A = -A'$ (это следует из третьего закона Ньютона). Совершение работы над системой приводит к увеличению ее внутренней энергии.

14.4. Количество теплоты. Первое начало термодинамики

Теплообменом (или *теплопередачей*) называется такой способ передачи энергии от одного тела другому, который осуществляется без совершения работы. Так, после приведения в контакт двух тел с различной температурой через некоторое время температуры обоих тел выравниваются. Такой процесс может протекать, например, при нагретых стенках сосуда (см. рис.14.2), неподвижном поршне и холодном газе. При этом объем газа не изменяется, т.е. работа газа против внешних сил равна нулю. Рассмотренный вид теплообмена называется теплопроводностью. Физическая природа теплопроводности заключается в том, что отдельные молекулы более нагретого тела передают энергию хаотического движения молекулам менее нагретого тела. Теплопередача может происходить также через излучение (поглощение молекулами тела электромагнитного излучения) и при перемешивании газа (конвекция).

Количество теплоты (или просто теплота) Q – это количественная мера энергии хаотического движения молекул, переданной от одной термодинамической системы другой.

Энергия в виде теплоты может как сообщаться системе ($dQ > 0$), так и отбираться от нее ($dQ < 0$).

Еще раз подчеркнем, что можно говорить о приращении внутренней энергии U , но нельзя говорить о приращении работы или тепла. Говорят

только о количестве последних двух величин в том или ином процессе, т.е. A и Q являются функциями процесса.

Первое начало термодинамики – это закон сохранения и превращения энергии, примененный к тепловым явлениям. Для изменения внутренней энергии можно записать, что:

$$\Delta U = Q - A, \quad (14.13)$$

где Q – сообщаемое системе количество теплоты, A – работа, совершенная системой. Уравнение (14.13) можно переписать в виде:

$$Q = \Delta U + A, \quad (14.14)$$

или в дифференциальном виде:

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad (14.15)$$

Уравнения (14.14)–(14.15) представляют собой математическую формулировку первого начала термодинамики, которая гласит: *количество теплоты, сообщенное системе, идет на изменение внутренней энергии системы и на совершение системой работы над внешними телами.*

14.5. Теплоемкость. Термодинамическое описание процессов в идеальных газах

Теплоемкостью системы (обычно обозначаемая символом C) называется величина равная количеству теплоты, которое необходимо передать системе для того, чтобы повысить ее температуру на один градус температурной шкалы. Поскольку теплоемкость может быть функцией температуры, то отношение подведенной в систему теплоты к вызванному ею приращению температуры следует брать в дифференциальной форме, то есть:

$$C = \frac{\delta Q}{dT}, \quad [C] = \text{Дж} / \text{К}. \quad (14.16)$$

Удельная теплоемкость ($c_{\text{уд}}$) численно равна количеству теплоты, которое необходимо сообщить единице массы вещества, чтобы повысить его температуру на один градус:

$$c_{\text{уд}} = \frac{\delta Q}{m dT}, \quad [c_{\text{уд}}] = \text{Дж} / \text{кг} \cdot \text{К}, \quad (14.17)$$

где m – масса вещества.

Молярная теплоемкость (c) численно равна количеству теплоты, которое необходимо сообщить одному молю вещества, чтобы повысить его температуру на один градус:

$$c = \frac{\delta Q}{\nu dT} = \frac{\delta Q}{\frac{m}{M} dT}, \quad [c] = \text{Дж} / \text{моль} \cdot \text{К}. \quad (14.18)$$

Теплоемкость C , удельная теплоемкость $c_{\text{уд}}$ и молярная теплоемкость c связаны очевидными соотношениями:

$$c_{\text{уд}} = \frac{c}{M}, \quad (14.19)$$

$$C = m c_{\text{уд}} = \frac{m}{M} c. \quad (14.20)$$

Из определения теплоемкости видно, что теплоемкость (через теплоту Q) зависит от условий передачи теплоты термодинамической системе, то есть *теплоемкость является функцией процесса*, в котором в термодинамическую систему поступает теплота.

Теплоемкость зависит от условий, в которых происходит нагревание тела. Наибольший интерес представляет молярная теплоемкость газа, когда нагревание происходит при постоянном объеме (обозначается c_V) или при

постоянном давлении (c_p). Чтобы получить выражения для c_V и c_p , применим первое начало термодинамики к изопроцессам. Напомним, что *изопроцессы* – это процессы, при которых один из основных параметров состояния остается постоянным.

Изохорный процесс — процесс, протекающий при постоянном объеме. Поскольку в изохорном процессе $V=const$ и $dV=0$, то $dA=pdV=0$, т.е. при изохорном процессе газ работу не совершает. Первое начало термодинамики запишется в этом случае в виде соотношения:

$$\delta Q=dU, \quad (14.21)$$

т.е. в изохорном процессе вся сообщенная газу теплота идет на изменение его внутренней энергии.

Согласно (14.18) для изохорного процесса:

$$\delta Q=vc_vdT. \quad (14.22)$$

Если газ состоит из молекул, каждая из которых имеет i степеней свободы, то согласно (14.10) элементарное изменение внутренней энергии газа равно:

$$dU = \frac{i}{2} \nu R dT. \quad (14.23)$$

Сопоставляя (14.22) и (14.23), получаем выражение для молярной теплоемкости при постоянном объеме:

$$c_V = \frac{i}{2} R. \quad (14.24)$$

Изобарный процесс – процесс, протекающий при постоянном давлении ($p=const$). Применим первое начало термодинамики к изобарному (изобарическому) процессу: $\delta Q=dU+\delta A$. Элементарное количество теплоты выразим согласно (14.18) через молярную теплоемкость при постоянном

давлении c_p : $\delta Q = \nu c_p dT$. При $p = \text{const}$ элементарную работу δA с помощью уравнения Менделеева–Клапейрона можно представить следующим образом:

$$\delta A = p dV = \nu R dT.^1$$

Если далее учесть выражение (14.23) для элементарного изменения внутренней энергии газа, то первое начало термодинамики преобразуется к виду:

$$\nu c_p dT = \frac{i}{2} \nu R dT + \nu R dT.$$

Отсюда находим, что теплоемкость газа при постоянном давлении c_p равна:

$$c_p = \frac{i + 2}{2} R. \quad (14.25)$$

Сравнивая выражения (14.24) и (14.25), получим соотношение, между молярными теплоемкостями при изобарном и изохорном процессах:

$$c_p - c_v = R. \quad (14.26)$$

Соотношение (14.26) называется *уравнением Майера*. Оно показывает, что молярная теплоемкость идеального газа при постоянном давлении больше его молярной теплоемкости при постоянном объеме на величину универсальной газовой постоянной. Неравенство $c_v < c_p$ объясняется тем, что в изобарном процессе в отличие от изохорного теплота, сообщаемая газу, расходуется не только на изменение его внутренней энергии, но также и на совершение газом работы.

Изотермический процесс — процесс, протекающий при постоянной температуре. Поскольку в изотермическом процессе $T = \text{const}$ и $dT = 0$, то согласно (14.10) $dU = 0$, т.е. в изотермическом процессе внутренняя энергия

¹ Из полученного выражения для δA вытекает физический смысл универсальной газовой постоянной R : $R = \delta A / \nu dT$, т.е. универсальная газовая постоянная R численно равна работе изобарного расширения 1 моля идеального газа при нагревании его на 1 К.

газа остается неизменной. Первое начало термодинамики для изотермического процесса записывается в виде:

$$\delta Q = \delta A, \quad (14.27)$$

т.е. передаваемая газу теплота полностью идет на совершение газом работы. Поэтому при изотермическом процессе теплоемкость газа равна бесконечности:

$$c_T = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{\delta Q}{0} = \infty.$$

Адиабатическим (адиабатным) называется процесс, при котором отсутствует теплообмен между системой и окружающей средой ($\delta Q = 0$). Теплоемкость газа в адиабатическом процессе равна нулю: $C = \frac{\delta Q}{dT} = 0$. Адиабатический процесс можно реализовать и при отсутствии хорошей теплоизоляции. Практически адиабатический процесс осуществляется при достаточно быстром расширении или сжатии газа, так что теплообмен между газом и внешней средой не успевает произойти. Из первого начала термодинамики для адиабатического процесса следует, что

$$\delta A = -dU, \quad (14.28)$$

т. е. работа совершается за счет изменения внутренней энергии системы.

Из выражения (14.28) следует, что при адиабатическом расширении газа ($dV > 0$) происходит охлаждение газа ($dT < 0$), а при адиабатическом сжатии газа ($dV < 0$) — нагревание ($dT > 0$).

Уравнение, связывающее два параметра газа, например давление и объем, в адиабатическом процессе, называют уравнением Пуассона, и оно имеет следующий вид:

$$PV^\gamma = const, \quad (14.29)$$

где $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ – показатель адиабаты.²

График, изображающий адиабатический процесс, называют *адиабатой*. На (p, V) – диаграмме адиабата изображается кривой, похожей на изотерму,

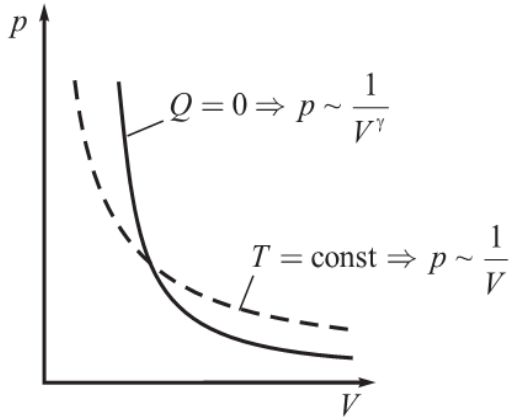


Рисунок 14.4.

но идущей круче (рис.14.4), т. к. $\gamma > 1$ (поскольку $c_p > c_v$). Это и понятно, т. к. при адиабатном расширении газ совершает работу за счет его внутренней энергии, и его температура падает, что еще больше уменьшает давление по сравнению с изотермическим расширением.

Все рассмотренные выше процессы являются частными случаями *политропического процесса*, который протекает при постоянной теплоемкости и описывается уравнением:

$$PV^n = const, \quad (14.30)$$

где $n = \frac{c_p - C}{c_v - C}$, называется показателем политропы.

Возможные значения показателя политропы находятся в пределах $-\infty \leq n \leq +\infty$. Ниже приводятся его значения для рассмотренных выше процессов:

$$\begin{aligned} n &= \pm\infty \text{ при } V = const \ (C = c_v), \\ n &= 0 \text{ при } P = const \ (C = c_p), \\ n &= 1 \text{ при } T = const \ (C = \pm\infty), \\ n &= \gamma \text{ при } dQ = 0 \ (C = 0, \ \gamma = \frac{c_p}{c_v}). \end{aligned}$$

² Вывод уравнения (29) приведен в приложении 1.

14.5. Классическая теория теплоемкости идеального газа

Рассматриваемая теория теплоемкости идеального газа называется классической. Согласно этой теории (см. (14.24) и (14.25)) теплоемкости c_V и c_p определяются только числом и характером степеней свободы идеального газа. Т.е. в модели идеального газа, например, все газы, молекулы которых состоят из двух атомов, независимо от их температуры, давления, массы молекул, химических свойств, молярных масс и т. д., имеют одни и те же значения c_V и c_p .

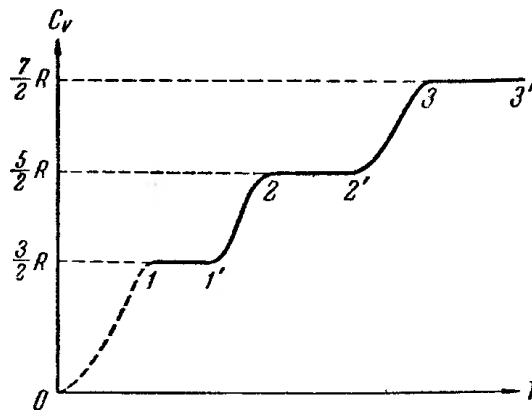


Рисунок 14.5.

На рис. 14.5 приведена экспериментальная зависимость c_V от температуры для двухатомного газа. Как видно из рисунка, теплоемкость не зависит от температуры только в пределах отдельных температурных интервалов. Причем в различных интервалах теплоемкость имеет значения, соответствующие различному числу степеней свободы молекулы. Так на участке 1-1' $c_V = 3/2R$. Это означает, что молекула ведет себя как система, обладающая только поступательными степенями свободы. На участке 2-2' $c_V = 5/2R$, следовательно, при температурах, соответствующих этому участку, у молекулы в дополнение к трем поступательным степеням свободы добавляются еще две — вращательные. Наконец, при достаточно больших температурах $c_V = 7/2R$, что свидетельствует о наличии при этих температурах колебаний молекулы.

В промежутках между указанными интервалами теплоемкость монотонно растет с ростом температуры, т.е. соответствует как бы переменному числу степеней свободы. Объяснение такого поведения дается квантовой механикой. Как устанавливает квантовая теория, энергия вращательного и колебательного движения молекул оказывается квантованной. Это означает, что энергия вращения и энергия колебания

молекулы могут иметь не любые значения, а только дискретные (т.е. отдельные, отличающиеся друг от друга на конечную величину) значения. Следовательно, энергия, связанная с этими видами движения, может меняться только скачками. Что и наблюдается на опыте.

Приложение 1

Воспользовавшись уравнением Менделеева–Клапейрона (14.2) и выражением для молярной теплоемкости при постоянном объеме (14.24), формулу (14.10) для внутренней энергии можно переписать в виде:

$$U = \frac{c_V}{R} pV.$$

Учитывая далее уравнение Майера (14.26) и определение показателя адиабаты получаем: $U = \frac{pV}{\gamma-1}$.

Отсюда элементарное изменение внутренней энергии равно:

$$dU = \frac{d(pV)}{\gamma-1} = \frac{pdV + Vdp}{\gamma-1}.$$

Подставляя это выражение в (14.27) и учитывая выражение (14.1) для элементарной работы, имеем:

$$pdV = -\frac{pdV + Vdp}{\gamma-1}$$

или

$$\gamma pdV + Vdp = 0.$$

Умножая обе части последнего уравнения на $V^{\gamma-1}$, получаем в левой части полный дифференциал:

$$\gamma pV^{\gamma-1}dV + V^{\gamma}dp = d(pV^{\gamma}) = 0.$$

В результате приходим к уравнению Пуассона (14.29):

$$PV^{\gamma} = const.$$

Используя уравнение Менделеева–Клапейрона, уравнение Пуассона можно переписать в виде связи между другими параметрами состояниями газа в адиабатическом процессе:

$$Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = const, \quad (14.31)$$

$$TV^{\gamma-1} = const. \quad (14.32)$$

14.6. Описание установки и вывод рабочей формулы

Прибор для определения отношения $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ состоит из стеклянного баллона Б, микроманометра М и насоса Н (рис.14.6).

Микроманометр предназначен для измерения избыточного над атмосферным давлением в баллоне. Кран К перекрывает сообщение баллона с атмосферой. Если закрыть кран К и накачать дополнительно воздух в баллон, то давление p в нем станет выше атмосферного p_0 на величину, пропорциональную разности уровней жидкости в манометре h . Примем

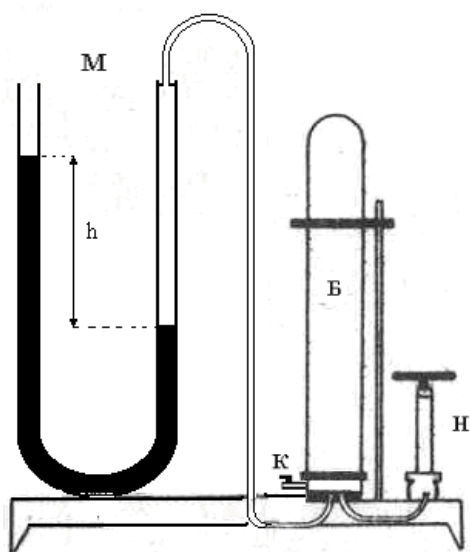


Рисунок 14.6.

данное состояние за начальное. На диаграмме в координатах (p, T) (рис.14.7) этому состоянию соответствует точка 1, в которой параметры системы принимают значения T_1, p_1, V . Если открыть кран К на короткое, но достаточное для выравнивания давления в баллоне с атмосферным время, а затем закрыть его снова, то произойдет адиабатный процесс, в результате которого давление в баллоне Б упадет до внешнего давления p_0 , а температура примет значение T_2 . Этому состоянию соответствуют параметры T_2, p_0, V (точка 2 на рис.14.7). Используя соотношение (14.31) процесс адиабатического расширения газа будем описывать уравнением:

данное состояние за начальное. На диаграмме в координатах (p, T) (рис.14.7) этому состоянию соответствует точка 1, в которой параметры системы принимают значения T_1, p_1, V . Если открыть кран К на короткое, но достаточное для выравнивания давления в баллоне с атмосферным время, а затем закрыть его снова, то произойдет адиабатный процесс, в результате которого давление в баллоне Б упадет до внешнего давления p_0 , а температура примет значение T_2 . Этому состоянию соответствуют параметры T_2, p_0, V (точка 2 на рис.14.7). Используя соотношение (14.31) процесс адиабатического расширения газа будем описывать уравнением:

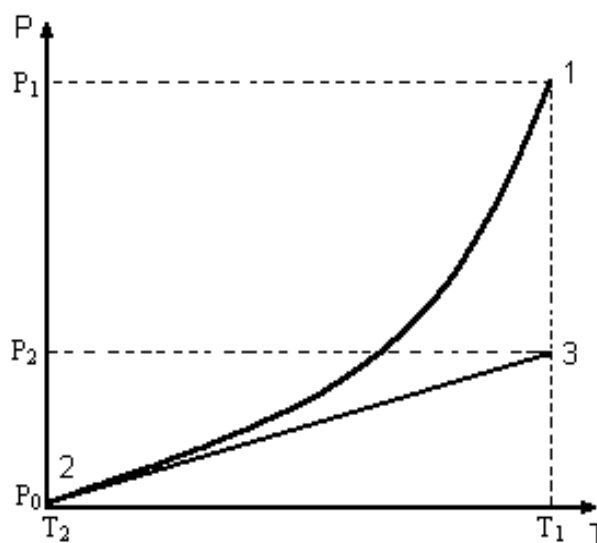


Рисунок 14.7.

$$T_1 p_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_2 p_0^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \quad \text{или} \quad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}. \quad (14.33)$$

После закрытия крана температура газа в баллоне в течение 2-3 минут повышается и выравнивается с внешней температурой T_1 , а давление повышается до p_2 . Этот процесс протекает изохорно и его ход можно описать законом Шарля:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_2}{p_0}. \quad (14.34)$$

Конечное состояние газа имеет параметры T_1 , p_2 , V (точка 3, рис.14.7). Из уравнения (33) и (34) следует соотношение:

$$\frac{p_2}{p_0} = \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}. \quad (14.35)$$

Преобразовав уравнение(35), можно записать равенство:

$$p_2 = p_0^{\frac{1}{\gamma}} p_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \quad (14.36)$$

Поскольку $p_1 = p_0 + \rho g h_1$ и $p_2 = p_0 + \rho g h_2$, где h_1 и h_2 разности уровней жидкости в манометре в состояниях 1 и 3 (ρ – плотность жидкости в манометре), то, подставив значения p_1 и p_2 в (14.36), получим соотношение:

$$p_0 + \rho g h_2 = p_0^{\frac{1}{\gamma}} (p_0 + \rho g h_1)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \quad (14.37)$$

Разделив левую и правую части (14.37) на p_0 , получим:

$$1 + \frac{\rho g h_2}{p_0} = \left(1 + \frac{\rho g h_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \quad (14.38)$$

Прологарифмируем уравнение (14.38):

$$\ln\left(1 + \frac{\rho g h_2}{p_0}\right) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \ln\left(1 + \frac{\rho g h_1}{p_0}\right). \quad (14.39)$$

Избыточное давление в баллоне $\rho g h$ много меньше внешнего давления p_0 , поэтому отношение $\frac{\rho g h}{p_0} \ll 1$. А так как $\ln(1+x) \approx x$, при условии если $x \ll 1$, то уравнение (14.39) можно переписать в виде:

$$\frac{\rho g h_2}{p_0} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho g h_1}{p_0}. \quad (14.40)$$

После необходимых сокращений получим уравнение:

$$h_2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} h_1. \quad (14.41)$$

Из этого уравнения получаем рабочую формулу:

$$\gamma = \frac{h_1}{h_1 - h_2}. \quad (14.42)$$

14.7. Порядок выполнения работы

1. Закрывать кран К. С помощью насоса Н создать в баллоне такое давление, чтобы разность уровней жидкости в коленах манометра h была равна примерно 25-30 см. Давление необходимо повышать осторожно, чтобы жидкость не выплеснулась из манометра. Подождать 3-4 минуты, пока газ в баллоне охладится, снять показание манометра h_1 и занести его таблицу 14.1.
2. Открыть кран К примерно на 1с и затем закрыть. Подождать 3-4 минуты пока охладившийся после адиабатического расширения газ не нагреется до комнатной температуры. Снять показания манометра h_2 и занести в таблицу 1.
3. Повторить измерения по п.п. 1-2 не менее четырех раз. Данные занести в таблицу 14.1.

Таблица 14.1

№ п/п	h_1	h_2	γ_i	$\Delta\gamma = \gamma - \gamma_i $
1				
2				
3				
4				
5				
-	-	-	$\bar{\gamma} =$	$\overline{\Delta\gamma} =$

4. Используя рабочую формулу $\gamma = h_1/(h_1-h_2)$, рассчитать значения γ для пяти случаев.

5. Рассчитать наиболее вероятное значение $\bar{\gamma}$ как среднее арифметическое всех измерений.

6. Рассчитать абсолютную ошибку определения γ как среднее арифметическое значение отклонений от среднего:

$$\Delta\bar{\gamma} = \sum \frac{|\bar{\gamma} - \bar{\gamma}_i|}{n}$$

7. Найти относительную ошибку измеряемой величины:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} \cdot 100\%$$

8. Записать окончательный результат в виде:

$$\gamma = \bar{\gamma} \pm \Delta\bar{\gamma}$$

9. Сделать выводы.

15. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ГАЗАХ

Цель работы.

1. Изучить явления переноса в газах.
2. Изучить способ измерения вязкости газов с помощью капиллярного вискозиметра.
3. Определять среднюю длину свободного пробега и эффективный диаметр молекул воздуха.

Список литературы.

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики, т.1, М.: Наука, 1989.
2. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики, М.: Высшая школа, 1989.
3. Трофимова Т.И. Курс физики, М.: Высшая школа, 1998.
4. Савельев И.В. Курс общей физики, т.1, М.: Наука, 1982.

Контрольные вопросы.

1. Какое состояние газа называется неравновесным?
2. В чем заключаются явления переноса?
3. Теплопроводность, коэффициент теплопроводности.
4. Диффузия, коэффициент диффузии.
5. Внутреннее трение в газах. Коэффициент внутреннего трения.
6. Как связана сила внутреннего трения между слоями с распределением скоростей в потоке газа?
7. Какова связь объема газа, протекающего через капилляр, с перепадом давления, радиусом капилляра, коэффициентом вязкости и длиной капилляра?
8. Дайте определение средней длины свободного пробега молекул газа и эффективного диаметра молекулы. Как они связаны друг с другом?
9. Как выражается средняя скорость хаотического движения молекул газа?

10. Изменяется ли эффективный диаметр молекул газа при изменении внешних условий (давления и температуры)?

Приборы и принадлежности.

1. Капиллярный вискозиметр.
2. Термометр.
3. Барометр.

Указания по технике безопасности.

Приборы питаются от сети переменного напряжения 220 В.

НЕ РАЗРЕШАЕТСЯ РАБОТАТЬ ПРИ ПОВРЕЖДЕННОЙ ИЗОЛЯЦИИ СОЕДИНИТЕЛЬНЫХ ПРОВОДОВ.

15.1. Явления переноса в газах

Состояние газа описывается такими параметрами как давление (P), объем (V), температура (T), плотность (ρ). **Если в объеме газа существует пространственная неоднородность давления, температуры или плотности, то такое состояние называется неравновесным.** В неравновесных системах возникают необратимые процессы самопроизвольного выравнивания этих неоднородностей. В результате в газе возникают потоки энергии, массы или импульса упорядоченного движения частиц. Эти потоки являются физической основой процессов, называемых явлениями переноса. К явлениям переноса относятся теплопроводность (перенос внутренней энергии), диффузия (перенос массы) и внутреннее трение (перенос импульса). Явления переноса способствуют установлению термодинамического равновесия в газах.

15.2. Теплопроводность газов

Теплопроводность – это процесс самопроизвольного переноса тепловой энергии от нагретых слоев газа к холодным вследствие хаотического движения молекул.

Если в одной области газа средняя кинетическая энергия молекул больше, чем в другой, то с течением времени вследствие постоянных столкновений молекул происходит процесс выравнивания средних кинетических энергий молекул, то есть выравнивание температур.

Теплопроводность возникает при наличии неоднородности температуры $T=T(x,y,z)$, которая количественно характеризуемой градиентом:

$$\overrightarrow{grad}T = \frac{\partial T}{\partial n} \vec{n} = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные орты вдоль координатных осей x, y, z соответственно.

Градиент температуры – вектор, направленный по нормали к изотермической поверхности в сторону увеличения температуры и численно равный изменению температуры на единицу длины в направлении этой нормали.

Для одномерного случая, когда температура изменяется только вдоль оси x :

$$\overrightarrow{grad}T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i}.$$

Перенос тепла между слоями газа описывается экспериментальным законом Фурье:

$$\delta Q = -\chi \frac{\partial T}{\partial x} dS_{\perp} dt, \quad (15.1)$$

где δQ – количество теплоты, которое проходит за время dt через площадку dS_{\perp} , расположенную перпендикулярно направлению переноса внутренней энергии. Коэффициент пропорциональности χ называется коэффициентом теплопроводности. Молекулярно-кинетическая теория показывает, что коэффициент теплопроводности зависит от рода газа и определяется следующим выражением:

$$\chi = \frac{1}{3} c_V \rho \langle v \rangle \langle \lambda \rangle, [\chi] = \frac{Вт}{м \cdot К} \quad (15.2)$$

где c_V – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме (количество теплоты, необходимое для нагревания 1кг газа на 1К при постоянном объеме), ρ – плотность газа, $\langle v \rangle$ – средняя скорость теплового движения молекул, $\langle \lambda \rangle$ – средняя длина свободного пробега молекул.

Так как:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \quad c_V = \frac{i}{2} \cdot \frac{R}{M}, \quad \rho = \frac{MP}{RT}, \quad (15.3)$$

где P – давление газа, R – молярная газовая постоянная, то коэффициент теплопроводности χ обратно пропорционален квадратному корню из молярной массы M . Следовательно, лучшими проводниками тепла являются легкие газы.

Знак минус в формуле (15.1) указывает на то, что при теплопроводности перенос внутренней энергии происходит в направлении убывания температуры.

15.3. Диффузия

Диффузия – это процесс самопроизвольного переноса массы из одной области системы в другую вследствие молекулярного движения.

При диффузии происходит самопроизвольное перемешивание молекул двух соприкасающихся газов, жидкостей и твердых тел.

Диффузия возникает при наличии градиента плотности вещества $\frac{d\rho}{dx}$ (в одномерном случае) и описывается экспериментальным законом Фика:

$$dm = -D \frac{\partial \rho}{\partial x} dS_{\perp} dt, \quad (15.4)$$

где dm – масса вещества, перенесенная в результате диффузии через площадку dS_{\perp} , перпендикулярную оси x , за время dt . Величина D называется **коэффициентом диффузии** и зависит от рода вещества. Молекулярно-кинетическая теория связывает коэффициент диффузии с параметрами газа:

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle, \quad [D] = \frac{m^2}{c}. \quad (15.5)$$

Коэффициент диффузии, как и коэффициент теплопроводности, обратно пропорционален корню квадратному из молярной массы. Это позволяет использовать газовую диффузию для разделения изотопов.

Знак минус в формуле (15.4) указывает, что перенос вещества при диффузии происходит в направлении убывания плотности.

15.4. Внутреннее трение (вязкость)

Если газ движется вдоль оси y так, что слои с разными координатами x перемещаются параллельно друг другу с разными скоростями (рис.15.1),

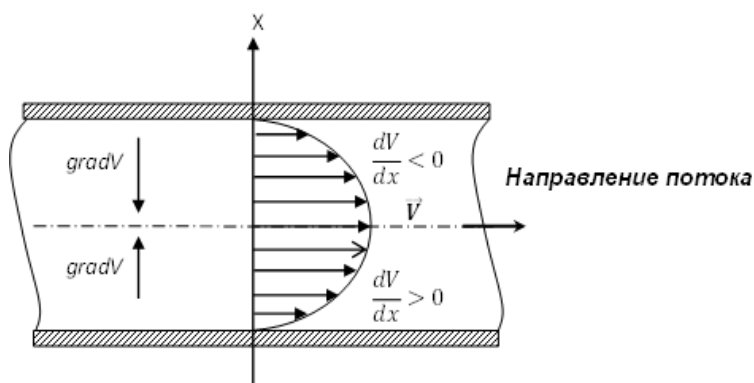


Рисунок 15.1.

то между слоями возникают силы внутреннего трения.

Возникновение внутреннего трения (вязкости) объясняется

тем, что из-за

хаотического теплового движения происходит обмен молекулами между

слоями, имеющими разные скорости направленного движения. В результате переноса импульса направленного движения происходит торможение слоя, движущегося быстрее, и ускорение слоя, движущегося медленнее. Силы трения, которые при этом возникают, направлены по касательной к поверхности соприкосновения слоев.

Значение силы внутреннего трения выражается экспериментальным законом Ньютона:

$$dF_{\text{тр}} = -\eta \left| \frac{\partial V}{\partial x} \right| dS, \quad (15.6)$$

Сила трения dF между слоями газа пропорциональна градиенту скорости слоев $\frac{dV}{dx}$ и площади соприкосновения слоев dS и направлена в сторону противоположную движению газа. Градиент скорости $\frac{dV}{dx}$ направлен перпендикулярно поверхности, разделяющей слои газа, в сторону увеличения скорости направленного движения слоев \vec{V} .

Коэффициент пропорциональности η называется коэффициентом внутреннего трения (коэффициентом вязкости). Он зависит от рода газа и согласно молекулярно-кинетической теории:

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle \lambda \rangle, \quad [\eta] = \text{Па} \cdot \text{с}. \quad (15.7)$$

15.5. Средняя длина свободного пробега и эффективный диаметр молекул

Из анализа формул (15.2), (15.5) и (15.7) следует, что коэффициенты переноса χ , D и η связаны со средней длиной свободного пробега молекул газа $\langle \lambda \rangle$. При хаотическом тепловом движении молекулы газа непрерывно сталкиваются друг с другом и меняют направление своего движения. **Наименьшее расстояние, на которое сближаются при столкновениях центры масс двух молекул, называется эффективным диаметром**

молекулы d . Эта величина имеет порядок 10^{-10} м. Можно принять, что между двумя последовательными столкновениями молекула движется равномерно и прямолинейно. *Путь, который при этом проходит молекула, называется длиной свободного пробега*. В общем случае длина пути между последовательными столкновениями различна, но так как система состоит из огромного числа молекул и они находятся в беспорядочном движении, то целесообразно говорить о средней длине свободного пробега молекул $\langle \lambda \rangle$. Расчеты показывают, что:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}, \quad (15.8)$$

то есть $\langle \lambda \rangle$ обратно пропорционально концентрации молекул n . Так как давление газа $P_0 = nkT$, где k – постоянная Больцмана, T – термодинамическая температура, то:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 P_0}. \quad (15.9)$$

В зависимости от давления $\langle \lambda \rangle$ может изменяться в широких пределах. Так для кислорода при комнатной температуре и давлении 10^5 Па, $\langle \lambda \rangle = 7.1 \cdot 10^{-8}$ м. Уменьшение давления приводит к соответствующему возрастанию длины свободного пробега.

15.6. Описание метода и вывод рабочей формулы

Среднюю длину свободного пробега $\langle \lambda \rangle$ и эффективный диаметр молекул воздуха d можно определить косвенным путем по связи этих величин с коэффициентами переноса, в частности, с коэффициентом внутреннего трения. Для измерения указанных параметров предложен метод нестационарного истечения газа через капилляр.

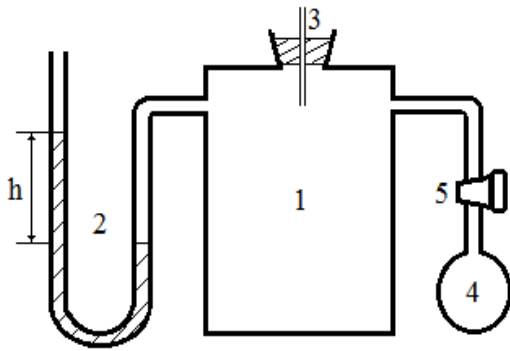


Рисунок 15.2.

Лабораторный стенд представлен на рис. 15.2. Он состоит из сосуда объемом в один литр (1), жидкостного манометра (2), капилляра (3) с известными параметрами и полиэтиленовой груши (4), соединенной гибким шлангом с сосудом. Сообщение груши с сосудом

перекрывается краном (5). В сосуде создается избыточное давление ~ 500 Па и закрывается кран. Выравнивание давлений происходит путем истечения воздуха через капилляр. Истечение газа происходит изотермически.

Нестационарный характер истечения описывается формулой Пуазейля в дифференциальной форме:

$$dV = \frac{R_0^4(P - P_0)\pi}{8\eta l} dt, \quad (15.10)$$

где dV – объем газа, вытекающего через капилляр за время dt , R_0 – радиус внутреннего канала капилляра, l – его длина, P и P_0 – давление внутри сосуда и внешнее давление, соответственно, η – коэффициент внутреннего трения. Формула (15.10) справедлива при условии $P - P_0 \ll P_0$.

Если в сосуде имеется избыточное давление, то воздух начнет вытекать через капилляр, и давление в сосуде будет падать. Это переменное давление в сосуде обозначим через P . В результате вытекания через капилляр, масса газа в сосуде уменьшится на величину:

$$dm = \rho dV, \quad (15.11)$$

где ρ – плотность, а dV – объем вытекшего газа.

Плотность ρ выразим из уравнения Менделеева–Клапейрона:

$$PV = \frac{m}{M}RT,$$

где P , V и T – давление, объем и температура данной массы газа m , M – молярная масса, R – молярная газовая постоянная.

Приняв во внимание, что $\rho = m/V$ находим:

$$\rho = \frac{PM}{RT}. \quad (15.12)$$

Убыль массы газа в сосуде dm , взятую по модулю, можно связать с изменением давления в нем, воспользовавшись уравнением Менделеева–Клапейрона:

$$dm = \frac{VM}{RT}dP, \quad (15.13)$$

где V – объем сосуда.

Подставляя dV , ρ и dm из (15.10), (15.12) и (15.14) в уравнение (15.11), получим выражение:

$$\frac{VM}{RT}dP = \frac{PM}{RT} \cdot \frac{\pi R_0^4 (P - P_0)}{8\eta l} dt,$$

которое определяет закон изменения давления в сосуде.

После сокращения и разделения переменных получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dP}{P(P - P_0)} = \frac{\pi R_0^4 dt}{8\eta lV}, \quad (15.14)$$

После разложения левой части уравнения (15.14) на более простые дроби получим:

$$\frac{dP}{P_0(P - P_0)} - \frac{dP}{PP_0} = \frac{\pi R_0^4 dt}{8\eta lV}, \quad (15.15)$$

Проинтегрировав выражение (15.15), получим:

$$\frac{1}{P_0} (\ln(P - P_0) - \ln P) = \frac{\pi R_0^4 t}{8\eta lV} + C. \quad (15.16)$$

Постоянную интегрирования C находим из начальных условий. Так как при $t=0$, $P=P_1$, то:

$$C = \frac{1}{P_0} (\ln(P_1 - P_0) - \ln P_1). \quad (15.17)$$

Подставив (15.17) в (15.16), получим:

$$\frac{1}{P_0} (\ln(P - P_0) - \ln P) - \frac{1}{P_0} (\ln(P_1 - P_0) - \ln P_1) = \frac{\pi R_0^4 t}{8\eta lV}. \quad (15.18)$$

Выражение (15.18) можно преобразовать следующим образом:

$$\ln \frac{(P - P_0)P_1}{(P_1 - P_0)P} = \frac{\pi R_0^4 t}{8\eta lV}. \quad (15.19)$$

Так как дополнительное давление в сосуде невелико, то с достаточной степенью точности можно считать, что $P \approx P_1$. Тогда (15.19) запишется так:

$$\ln \frac{P - P_0}{P_1 - P_0} = \frac{\pi R_0^4 t}{8\eta lV}. \quad (15.20)$$

Обозначим дополнительное давление в сосуде в начальный момент времени через ΔP_1 а в конечный момент времени – через ΔP :

$$\begin{aligned} \Delta P_1 &= P_1 - P_0 = \alpha h_1, \\ \Delta P &= P - P_0 = \alpha h_2, \end{aligned} \quad (15.21)$$

где h_1 , и h_2 – начальная и конечная разности уровней манометра, соответственно; α – коэффициент пропорциональности.

Подставив в (15.20) значения коэффициента внутреннего трения, плотности и средней скорости движения молекул из (15.3), (15.7) и (15.12) и учтя соотношения (15.21), приходим к уравнению, позволяющему вычислить среднюю длину свободного пробега молекул воздуха на основании данных, полученных в опыте по истечению газа через капилляр:

$$\ln \frac{h_1}{h_2} = \frac{3R_0^4 t}{\langle \lambda \rangle l V} \sqrt{\frac{\pi^3 R T}{512 M}}.$$

Отсюда:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{3R_0^4 t}{l V \ln \frac{h_1}{h_2}} \sqrt{\frac{\pi^3 R T}{512 M}}. \quad (15.22)$$

Выражение (15.22) удобно представите в виде:

$$\lambda = L \frac{t \sqrt{T}}{\ln \frac{h_1}{h_2}}, \quad (15.23)$$

где L – постоянная данной установки, равная:

$$L = \frac{3R_0^4}{l V} \sqrt{\frac{\pi^3 R}{512 M}}. \quad (15.24)$$

При проведении опыта отношение $\frac{h_1}{h_2}$ удобно выбрать равным основанию натурального логарифма. Тогда $\ln \frac{h_1}{h_2} = 1$ и выражение (15.23) запишется так:

$$\lambda = L t \sqrt{T}. \quad (15.25)$$

Рассчитав среднюю длину свободного пробега по (15.25), находим эффективный диаметр молекул воздуха d , воспользовавшись соотношением (15.9):

$$d = \sqrt{\frac{kT}{\sqrt{2} \pi \lambda P_0}}. \quad (15.26)$$

Формулы (15.25) и (15.26) являются рабочими.

15.7. Порядок выполнения работы

1. Записать в таблицу постоянную установки L , показания лабораторных термометра T и барометра P_0 в единицах системы СИ. (1 мм рт.ст. = 133 Па)
2. Открыть кран 5, соединяющий полиэтиленовую грушу 4 с баллоном 1.
3. Закрыть пальцем отверстие в груше и, медленно сжимая ее, поднимать давление в баллоне до тех пор, пока уровень жидкости в правом колене манометра не поднимется на 1-2 см выше верхней отметки на шкале манометра. Не отпуская сжатую грушу, закрыть кран 5.
4. С помощью секундомера измерить время снижения t давления в баллоне от верхней до нижней отметки. Значение t занести в таблицу 15.1.
5. Повторить эксперимент (п.п. 2÷3) еще два раза.

Таблица 15.1

	t, c	λ, m	$ \Delta\lambda , m$	d, m	$ \Delta d , m$
$T = \quad , K$					
$P_0 = \quad , Pa$					
$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$					
$L = \quad , m/c \cdot K^{1/2}$	$\bar{t} =$	$\bar{\lambda} =$	$ \Delta\bar{\lambda} =$	$\bar{d} =$	$ \Delta\bar{d} =$

6. По формуле(15.25) вычислить значения λ_i для каждого значения t .

7. Найти среднее арифметическое значение $\bar{\lambda}$ и среднее арифметическое значение абсолютной погрешности $\Delta\bar{\lambda}$.

8. По формуле (15.26) вычислить значения d_i для каждого из значений λ_i . Найти \bar{d} и абсолютную погрешность $\Delta\bar{d}$, аналогично п.7.

9. Записать окончательные результаты в виде

$$\lambda = \bar{\lambda} \pm \Delta\bar{\lambda}, m$$

$$d = \bar{d} \pm \Delta\bar{d}, m$$

и сделать выводы.

16. ИЗМЕРЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТАЛЛОВ

Цель работы.

1. Изучить явление переноса в твердых телах;
2. Изучить метод определения коэффициента теплопроводности твердых тел.

Список литературы.

1. Исаченко В.П. Теплопередача. Изд. 2-е М.: Энергия, 1969.
2. Трофимова Т.Н. Курс физики: учеб. пособие для вузов.– 2-е изд.–М.: Высш.шк.,1990.

Порядок теоретической подготовки к выполнению работы.

Изучить и законспектировать в тетрадь ответы на контрольные вопросы.

Вопросы к зачету.

1. Понятие температурного поля.
2. Градиент температуры.
3. Перенос тепла в твердых телах.
4. Уравнение Фурье.
5. Физический смысл коэффициента теплопроводности.
6. Вывод рабочей формулы.
7. Охлаждение тела, темп охлаждения.
8. Регулярный тепловой режим.
9. Понятие равновесной и неравновесной термодинамической системы.

16.1. Введение

В работе рассматривается теория *неравновесных процессов*, которые реализуются в макроскопических системах и развиваются во времени по вполне определенным законам, законам *физической кинетики*.

Равновесное состояние изолированной термодинамической (макроскопической) системы характеризуется однородным распределением плотности, температуры и отсутствием упорядоченного движения текучей среды. И наоборот, система с неоднородным распределением полей плотности, температуры, проекций скорости упорядоченного движения среды будет находиться в неравновесном состоянии. При неравновесном состоянии возникают градиенты соответствующих полей: градиенты плотности, температуры и проекций скоростей, которые приводят к явлениям *переноса* массы, теплоты и импульса. С течением времени, в результате молекулярных движений в средах, градиенты соответствующих полей будут стремиться к нулю и система из неравновесного состояния перейдет в равновесное.

Перенос теплоты в кристалле происходит за счет непосредственного силового взаимодействия с соседними атомами, колеблющимися вблизи своих узлов. В этом случае амплитуды колебаний атомов в области с меньшей температурой постепенно увеличиваются, а в области с большей – уменьшаются.

В нашем случае будет рассматриваться изменение температуры в среде вдоль одной оси, оси x – одномерная неоднородность.

Температурное поле – это совокупность мгновенных значений температуры во всех точках изучаемого пространства. Так как температура есть величина скалярная, то и температурное поле является скалярным полем. Различают стационарное температурное поле и нестационарное. Стационарным температурным полем называется поле, температура которого в любой точке его не изменяется во времени, т.е. является функцией координат. Нестационарным температурным полем называется поле,

температура которого изменяется не только в пространстве, но и с течением времени.

Температурное поле может быть одномерным, двух и трехмерным. Примером одномерного нестационарного температурного поля может служить поле при охлаждении цилиндра конечных размеров в неограниченном пространстве с постоянной температурой окружающей среды, при этом теплота распространяется перпендикулярно его боковой поверхности.

Если точки поля, имеющие одинаковую температуру, соединить, то получим *изотермическую поверхность*. Пересечение изотермической поверхности с плоскостью дает нам на этой плоскости семейство изотерм, линий, соответствующих одинаковой температуре. Изотермические поверхности и изотермические линии не пересекаются между собой и при непрерывном поле не обрываются внутри него. Вдоль изотермы температура не изменяется, в любом другом направлении температура изменяется. Наибольший перепад температуры на единицу длины происходит в направлении нормали к изотермической поверхности. Возрастание температуры в направлении нормали к изотермической поверхности характеризуется *градиентом температуры* \overrightarrow{gradT} . Итак, градиентом температуры называется векторная физическая величина численно равная изменению температуры, приходящемуся на единицу длины пространства вдоль единичного вектора \vec{n}_0 , направленного по нормали к изотермической поверхности, и в сторону возрастания температуры (рис. 16.1):

$$\overrightarrow{gradT} = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{n}_0. \quad (16.1)$$

Градиент обозначается также символом ∇ (набла), следовательно $\overrightarrow{gradT} = \nabla T$. Для трехмерного температурного поля градиент температуры равен:

$$\overrightarrow{gradT} = \nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k}, \quad (16.2)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – соответственно ортогональные векторы единичной длины, указывающие положительное направление увеличения физической величины.

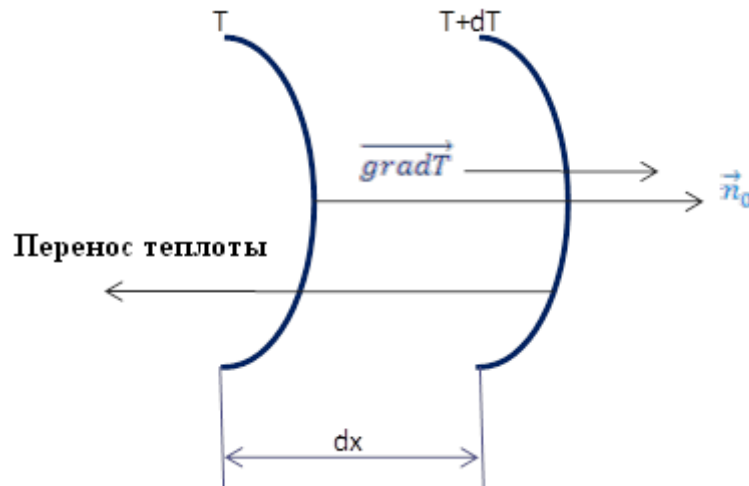


Рисунок 16.1. Схема направлений градиента температуры и теплового потока

Теплота – это скалярная физическая величина, характеризующая энергию, передаваемую от более нагретых слоев вещества к менее нагретым вследствие теплообмена без совершения работы. Количество теплоты, проходящее в единицу времени через единичную площадку изотермической поверхности, называется *плотностью теплового потока*:

$$q = \frac{\delta Q}{d\tau} \cdot \frac{1}{ds}. \quad (16.3)$$

Необходимым условием распространения теплоты является наличие температурного градиента. Опыт показывает, что передача теплоты теплопроводностью происходит по нормали к изотермической поверхности от мест с большей температурой к местам с меньшей температурой (рис. 16.1).

В металлах основным передатчиком теплоты являются свободные электроны, которые можно уподобить идеальному одноатомному газу. Передача тепла при помощи колебательных движений атомов или в виде упругих звуковых волн не исключается, но их доля незначительна по сравнению с той долей тепла, которая передается электронным газом. Французский ученый Ж.Фурье, обобщая опытные данные, установил, что поток теплоты теплопроводностью через единицу поверхности в единицу времени пропорционален температурному градиенту в данном месте и коэффициенту теплопроводности, зависящему от природы и состояния тела:

$$\delta Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} ds \cdot d\tau, \quad (16.4)$$

где λ – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К); ds – площадь поверхности (м²); $d\tau$ – время переноса (с).

Или закон Фурье через плотность теплового потока:

$$\vec{q} = -\lambda \cdot grad T. \quad (16.5)$$

Строго говоря, выражения (16.4) и (16.5) справедливы только для изотропных тел ($\lambda = \text{const}$), не для слишком высоких значений температурного градиента и в случае, когда длина свободного пробега носителя тепла мала по сравнению с размерами тела.

Выражения (16.4) и (16.5) еще называют законами теплопроводности или законами Фурье. Из этих уравнений следует физический смысл коэффициента теплопроводности:

$$\lambda = -\frac{\delta Q}{\frac{\partial T}{\partial x} \cdot dS \cdot d\tau}, \quad (16.6)$$

коэффициент теплопроводности – это скалярная физическая величина численно равная количеству теплоты, проходящей через единицу

изотермической поверхности за единицу времени при градиенте температуры равном единице. Для различных веществ коэффициент теплопроводности различен и, в общем, зависит от структуры, плотности, влажности, давления и температуры. Зависимость $\lambda=f(t)$ для большинства материалов оказывается почти линейной, а для металлов λ с увеличением t убывает. Коэффициент теплопроводности металлов лежит в пределах $20\div 400$ Вт/м·К: для серебра ($\lambda\approx 410$ Вт/м·К), меди ($\lambda\approx 395$ Вт/м·К), золота ($\lambda\approx 300$ Вт/м·К), алюминия ($\lambda\approx 210$ Вт/м·К). Для металлов λ также убывает и при наличии разного рода примесей.

16.2. Вывод рабочей формулы

Простое охлаждение – это процесс, протекающий в теле при постоянных значениях температуры окружающей среды (t_{cp}) и коэффициента теплоотдачи (α) на наружной поверхности, т.е. обе эти величины не зависят от времени τ . Вместе с тем мы накладываем на рассматриваемый процесс некоторое ограничение: отдельные части охлаждаемого тела настолько плотно соприкасаются одна с другой, что при переходе через поверхность их раздела температура меняется непрерывно.

Если на рис. 16.2 мы схематично изобразим поверхность цилиндра S , направление теплового потока, то согласно закону сохранения энергии, количество теплоты dQ_1 , проходящей через поверхность dS за время $d\tau$ из внутренних частей цилиндра равна количеству теплоты dQ_2 соответственно рассеивающейся во внешнюю среду через ту же поверхность dS и за то же время $d\tau$ – закон охлаждения Ньютона:

$$\delta Q_1 = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \cdot dS \cdot d\tau, \quad (16.7)$$

$$\delta Q_2 = \bar{\alpha}(T_{\text{н}} - T_0) \cdot dS \cdot d\tau. \quad (16.8)$$

Здесь T_n и T_0 – температуры соответственно поверхности цилиндра и окружающей среды (К); $\bar{\alpha}$ – средний коэффициент теплоотдачи на поверхности цилиндра ($\text{Вт}/\text{м}^2 \cdot \text{К}$).

Так как $\delta Q_1 = \delta Q_2$, то:

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \cdot dS \cdot d\tau = \bar{\alpha} \cdot (t_n - t_0) \cdot dS \cdot d\tau.$$

Отсюда

$$\lambda = -\frac{t_n - t_0}{\frac{\partial t}{\partial x}} \cdot \bar{\alpha}$$

или при конечном изменении:

$$\lambda = -\frac{t_n - t_0}{\frac{t_0 - t_y}{R}} \cdot \bar{\alpha} = \frac{t_n - t_0}{\frac{t_y - t_0}{R}} \cdot \bar{\alpha}, \quad (16.9)$$

где t_n – температура центра цилиндра ($^{\circ}\text{C}$); R – радиус цилиндра (м).

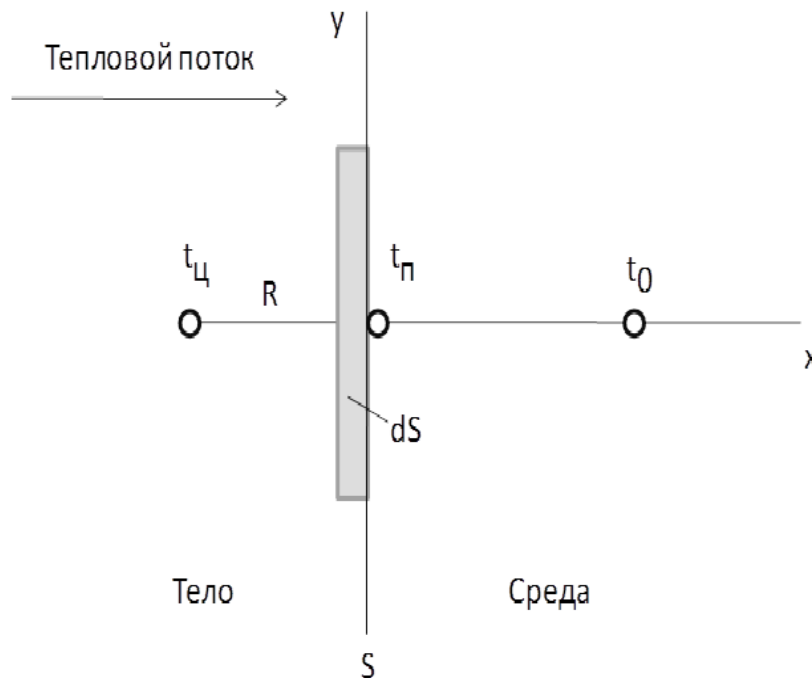


Рисунок 16.2. К выводу уравнений теплообмена на наружной поверхности твердого тела

Регулярный тепловой режим – это упорядоченный режим охлаждения (нагрева). Графическое изображение процесса простого охлаждения тела в системе координат $t=f(\tau)$ представлено на рис. 16.3. Как видно на рис. 16.3 весь процесс охлаждения тела можно разделить на две стадии: иррегулярную и регулярную.

Первая стадия (иррегулярная) характеризуется тем, что изменение температурного поля во времени не зависит от свойств тела, однако с течением времени на условия охлаждения оказывают физические свойства тела и наступает регулярный тепловой режим.

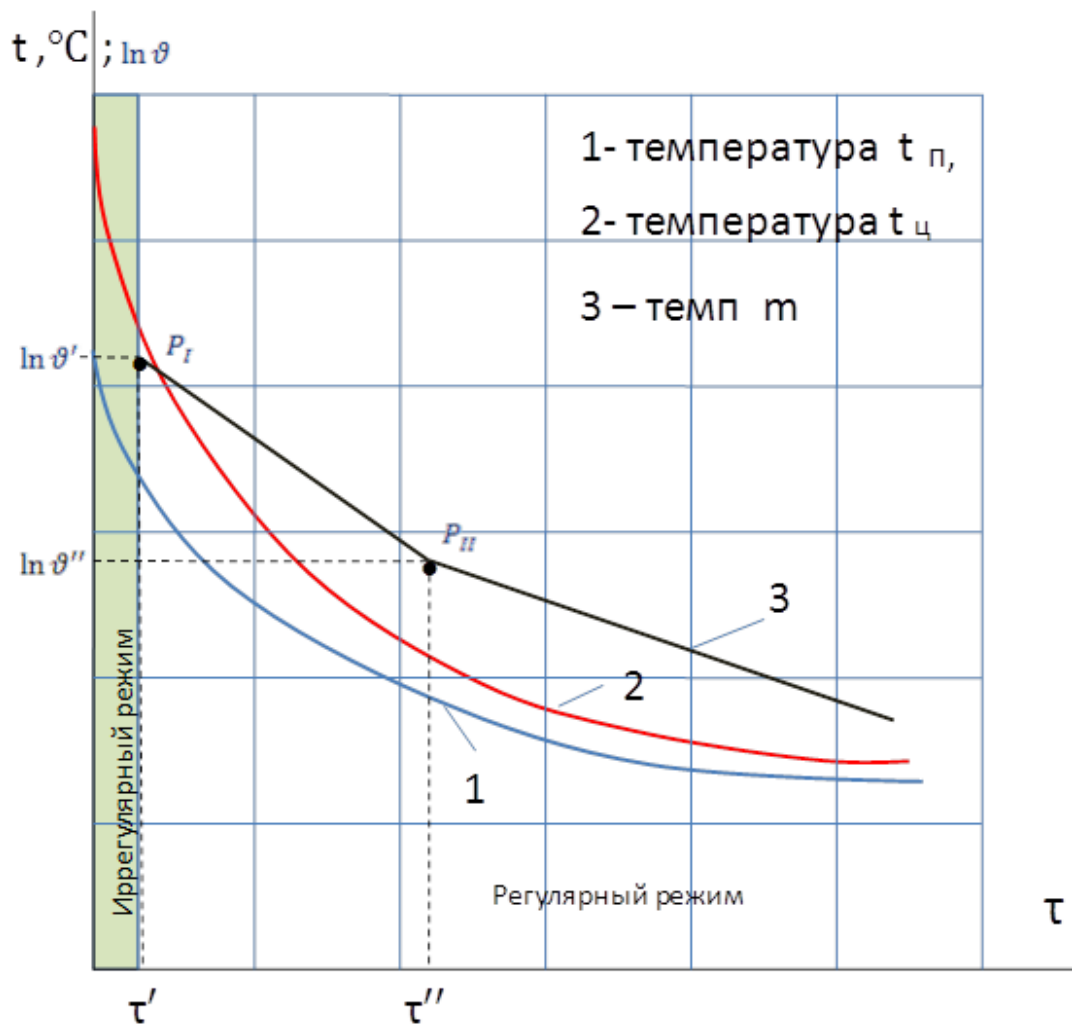


Рисунок 16.3. Кривые изменения температур центра цилиндра, поверхности и темп охлаждения в полулогарифмических координатах

При этом закон изменения температурного поля во времени принимает простой и универсальный вид: логарифм избыточной температуры тела в любой его точке изменяется во времени по линейному закону $\ln \vartheta = -m\tau$. Здесь $\vartheta = |t - t_0|$ – избыточная температура, равная модулю разности между температурой тела t и температурой окружающей среды t_0 ; m – темп охлаждения, величина, характеризующая интенсивность охлаждения (c^{-1}).

$$m = \frac{\ln \vartheta' - \ln \vartheta''}{\tau'' - \tau'}. \quad (16.10)$$

Избыточные температуры ϑ' и ϑ'' , соответствующие временам τ' и τ'' , берутся по рис. 16.3 и зависимости 3.

Темп охлаждения однородного тела m , с другой стороны, при конечном значении коэффициента теплоотдачи пропорционален коэффициенту теплоотдачи $\bar{\alpha}$ и внешней поверхности тела F и обратно пропорционален полной теплоемкости тела $C_V = c \cdot \rho \cdot V$:

$$m = \psi \frac{\bar{\alpha} \cdot F}{C_V}. \quad (16.11)$$

Здесь ψ – коэффициент пропорциональности, характеризующий *неравномерность температурного поля* в теле и численно равный отношению средней поверхностной температуры тела к его средней объемной температуре, величина безразмерная ($0 \leq \psi \leq 1$).

Используя формулы (16.9) и (16.11), получим рабочую формулу для расчета коэффициента теплопроводности материала образца:

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{m} \cdot c \cdot \rho \cdot d^2}{8 \cdot \psi} \cdot \frac{t_n - t_0}{t_{ц} - t_0}. \quad (16.12)$$

Из формулы (16.11) можно выразить коэффициент неравномерности распределения температуры в образце:

$$\psi = \frac{m \cdot C_V}{\bar{\alpha} \cdot F}. \quad (16.13)$$

Из формулы (16.13) следует, ψ не зависит от времени охлаждения, остается постоянным на всем протяжении охлаждения, но зависит от условий охлаждения на поверхности тела, размеров тела и его физических свойств. Известно, что ψ изменяется от 0 до 1 и в предельных случаях им равен. Для случая, когда $\bar{\alpha}$ имеет большое значение, но $\bar{\alpha} \neq \infty$, величину уже среднего коэффициента $\bar{\psi}$ можно связать с постоянной эксперимента K и средним темпом охлаждения.

$$\bar{\psi} = K \cdot \bar{m}. \quad (16.14)$$

Под K понимается численное значение констант, входящих в формулу (16.13). Для образца из материала Al с его размерами $d=19.9$ мм, $l=38$ мм (длина) и мощностью нагревательного элемента печи $P=27.5$ Вт, $K=0.6$ с.

16.3. Схема и описание экспериментальной установки

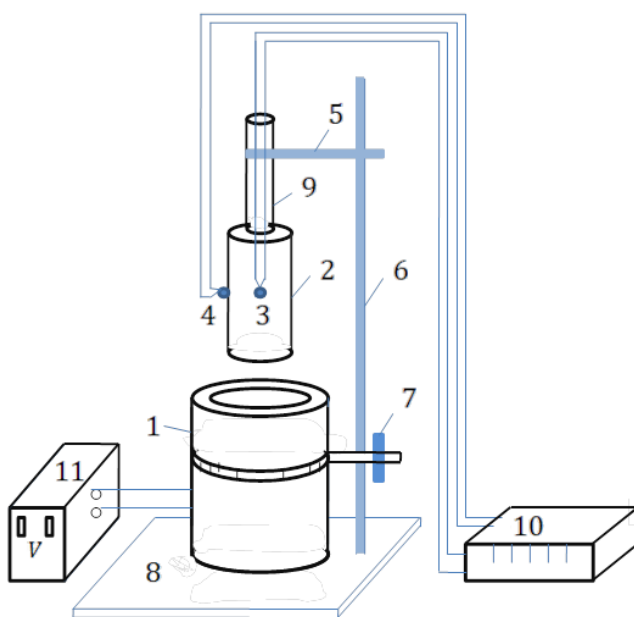


Рисунок 16.4.

К стойке 6 прикреплены печь 1 и образец 2 (рис. 16.4). Образец крепится к удлинителю 9, выполненному из материала плохо проводящего тепло, который жестко через кронштейн 5 крепится к стойке 6. На стойке 6 имеется рейка, по которой с помощью винта 7 может вертикально перемещаться печь.

С помощью блока питания 11 устанавливают соответствующий ток и напряжение, подающиеся на печь. Температура образца контролируется с помощью потенциометров 10 и термопар 3 и 4. Термопара 3 контролирует температуру в центре образца $t_{ц}$, 4-поверхности $t_{п}$. 8-основание крепления.

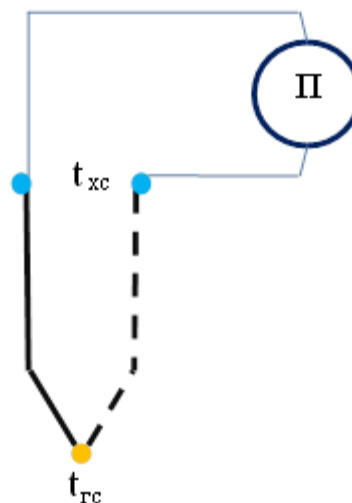


Рисунок 16.5. Термопара

Термопара – это термочувствительный элемент в виде двух спаянных друг с другом проводников (или полупроводников) из разнородных металлов и применяется для измерения температур различных веществ. Состоит из двух спаев (рис. 16.5): нижний спай помещается в точку тела, в которой необходимо измерить температуру и называется горячим $t_{гс}$, а верхний – холодным $t_{хс}$, температура которого поддерживается постоянной и равной температуре окружающей среды t_0 . Действие термопары основано на свойстве разнородных металлов (в нашем случае хромель-копель), образовывать на концах холодного спаива термоэлектродвижущую силу – термо-эдс (ϵ), зависящую от материала проводников и разности температур горячего и холодного спаев. Термо-эдс измеряется потенциометром П.

16.4. Порядок выполнения работы

1. Познакомиться со схемой экспериментальной установки на рис.4.
2. Зарисовать таблицу 16.1.
3. По наружному термометру определить температуру окружающей среды t_0 и внести ее значение в таблицу 16.1.
4. Убедиться, что исследуемый образец 2 находится в печи 1. Если это не так, то с помощью винта 7 поднять печь таким образом, чтобы

находящийся на удлинителе 9 образец 2 полностью погрузился в камеру печи 1.

5. Включить блок питания 11 в сеть, при этом напряжение на нем как и ток выставлены в соответствии со значениями $U=25.0\text{ В}$, $I=1.1$ Начался нагрев.

6. Следить за показаниями потенциометров. Греть образец следует до показания потенциометра $\varepsilon_{\text{ц}} \leq 6\text{ мВ}$. После чего необходимо выключить блок питания и **НЕМЕДЛЕННО** с помощью винта 7 опустить печь вниз, чтобы образец полностью был на воздухе и заслонкой отсечь печь от охлаждающегося образца.

7. С этого момента наступило время охлаждения образца. Пошел отсчет времени охлаждения и снятие показаний потенциометров, измеряющих термо-эдс центра образца $\varepsilon_{\text{ц}}$ и поверхности $\varepsilon_{\text{п}}$. Заносим эти значения в табл.16.1 в соответствии со временем охлаждения τ . Продолжительность охлаждения (эксперимента) $\tau \approx 20 \div 30$ мин. Количество измерений 20.

8. По графику зависимости $\varepsilon = f(t)$ (рис. 16.6) определить $t_{\text{ц},0}$ и $t_{\text{п},0}$ при $t_{\text{xc}}=0^{\circ}\text{C}$ и значения внести в табл.16.1.

9. Учесть температуру t_{xc} . В этом случае реальная температура в центре образца и на его поверхности увеличится на t_{xc} , внести значения $t_{\text{ц}}$, и $t_{\text{п}}$ ($t_{\text{п}} = t_{\text{п},0} + t_{\text{xc}}$, как пример), с этим условием в табл.16.1.

Таблица 16.1.

t ₀ =							
№ п/п	τ, мин	При t _{xc} =0 ⁰ C					
		ε _ц , мВ	ε _п , мВ	t _{ц,0} , °C	t _{п,0} , °C	t _ц , °C	t _п , °C
1	0						
...	...						
20	19						

Таблица 16.2.

№ п/п	τ , МИН	t_{cp} , °С	$\ln(t_{cp} - t_0)$	\bar{m}, c^{-1}	$\bar{\psi}$	$\bar{\lambda}, Bm / (m \cdot K)$
1	0					
...	...					
20	19					

10. Построить на миллиметровке графики зависимостей $t_{ц} = f(\tau)$ и $t_{п} = f(\tau)$.

11. В табл. 16.2 вписать среднюю температуру образца для соответствующего времени и с учетом поправок на температуру холодного спая термопары:

$$t_{cp} = \frac{t_{ц} + t_{п}}{2}$$

12. На миллиметровке графиков зависимостей $t_{ц} = f(\tau)$ и $t_{п} = f(\tau)$ нанести значения $\ln(t_{cp} - t_0)$ в виде точек для соответствующих времен. Соединив рядом стоящие точки на миллиметровке, получить график этой зависимости, которая принимает форму прямых, что свидетельствует о наступлении регулярного теплового режима. Здесь надо быть внимательным – соединять только те точки, которые лежат на одной прямой с одним тангенсом угла наклона к оси времени. Дело в том, что, при охлаждении тела может быть несколько участков, относящихся к регулярному тепловому режиму, но уже с другим темпом охлаждения и поэтому нужно отследить точку перегиба этих участков, имеющих различный тангенс угла наклона к оси времени как это видно на рис. 16.3.

13. Определить темп охлаждения образца m для каждого из участков, а затем \bar{m} . Для этого достаточно взять на прямой полулогарифмического графика (рис.16.3, как пример) две точки P_I и P_{II} , соответствующие двум моментам времени τ' и τ'' ($\tau'' > \tau'$), которым соответствуют значения ϑ' и ϑ'' ($\vartheta' > \vartheta''$) и применить формулу (16.10). Далее:

$$\bar{m} = \frac{m_1 + m_2}{2},$$

где m_1 и m_2 – темпы охлаждения регулярных участков 1 и 2 (считаем, что при охлаждении образца имеется два участка регулярного режима).

14. Используя формулу (16.12), найти среднее значение коэффициента теплопроводности материала образца и занести его значение в табл.16.2.

15. Использовать константы таблицы 16.3.

Таблица 16.3.

Материал	Удельная теплоемкость \bar{c} , Дж/(кг · К)	Плотность $\bar{\rho}$, кг/м ³	Диаметр образца $\bar{d} \cdot 10^{-3}$, м
Дюралюминий	920	2700	19.9
Сталь	462	7900	
Бронза	381	8000	
Медь	381	8800	

16. Найти по выражениям (16.15) и (16.16) абсолютную погрешность коэффициента теплопроводности:

$$\varepsilon_\lambda = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta c}{\bar{c}} + \frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}} + 2 \frac{\Delta d}{\bar{d}}, \quad (16.15)$$

где $\Delta d = 0.05$ мм; $\Delta\rho = 0.5$ кг/м³; $\Delta c = 0.5$ Дж/(кг · К).

$$\Delta\lambda = \bar{\lambda} \cdot \varepsilon_\lambda. \quad (16.16)$$

17. Записать окончательный результат по форме:

$$\lambda = \bar{\lambda} \mp \Delta\lambda.$$

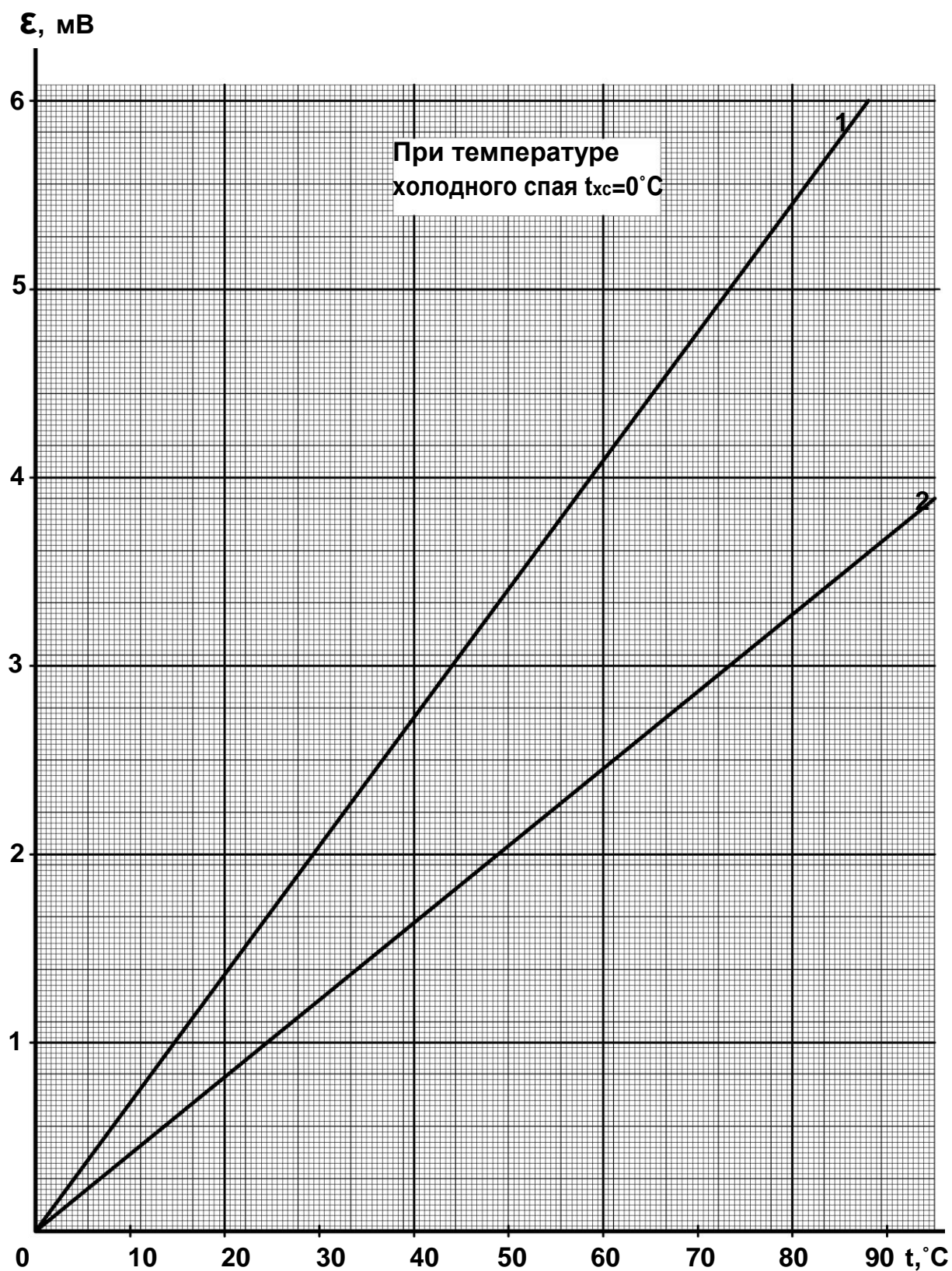


Рисунок 16.6. Зависимость температуры горячего спая от термо-эдс для:
1) хромель-копелевой термопары; 2) хромель-алюмелевой термопары.