

## Практическое занятие

# «ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДВУХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ В ТРЕХ ПРОЕКЦИЯХ»

Цель занятия: познакомится с правилами построения пересечения двух геометрических тел в проекциях на примере призмы, пирамиды, цилиндра, конуса, шара.

Геометрическое тело – часть пространства, ограниченная гранными, линейчатыми или криволинейными поверхностями.

Основными геометрическими телами являются: гранные (призма, пирамида), линейчатые (цилиндр, конус), криволинейные (шар, тор).

Геометрические тела могут быть ограничены как проецирующими поверхностями (призмой, цилиндром), так и поверхностями общего положения (пирамидой, конусом, шаром, тором).

Так как любой объект состоит из комбинации простейших геометрических тел, то при решении задач по начертательной геометрии и инженерной графике необходимо уметь изображать геометрические тела и строить проекции точек и линий на их поверхности.

### **1. Построение проекций призмы с вырезом, образованным плоскостями частного положения**

На рис. 1 приведен пример построения проекций прямой (горизонтально-проецирующей) треугольной призмы с вырезом, образованным тремя плоскостями частного положения: –  $\Gamma (\Gamma_2^*)$  – фронтально-проецирующей,  $\Theta (\Theta_2^*, \Theta_1^*)$  – профильной и  $\Delta (\Delta_2^*, \Delta_3^*)$  – горизонтальной.

Фронтальная проекция линии выреза принадлежит фронтальным проекциям  $\Gamma_2$ ,  $\Theta_2$  и  $\Delta_2$ .

Боковые грани призмы – горизонтально-проецирующие плоскости, поэтому их горизонтальные проекции вырождаются в отрезки (стороны) треугольника, обладающие собирательным свойством. Следовательно, горизонтальная проекция линий пересечения призматической поверхности с плоскостями выреза принадлежит линии контура горизонтальной проекции призмы (см. проекции точек  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ).

Обозначим ребра призмы отрезками  $AF$ ,  $BM$  и  $CN$ .

*Примечание.* \* – вырожденная проекция.

На фронтальной проекции призмы отметим характерные точки пересечения плоскостей выреза с ребрами (точки 1, 1', 4, 4') и гранями (точки 2, 2', 3, 3') призмы, которые лежат на ребрах  $AF$  и  $BM$  и на гранях  $AFNC$  и  $BMNC$  соответственно и определим вырожденные в точки проекции линий пересечения плоскостей  $\Gamma$  и  $\Theta$  (22'),  $\Theta$  и  $\Delta$  (33').

Фронтально-проецирующая плоскость  $\Gamma$ , перпендикулярная плоскости  $\Pi_2$ , проецируется на плоскости  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$  замкнутым контуром 11'2'2 в виде четырехугольника.

Точки 2 и 2' строятся на плоскости  $\Pi_3$  по координатам  $y_2, y'_2$ .

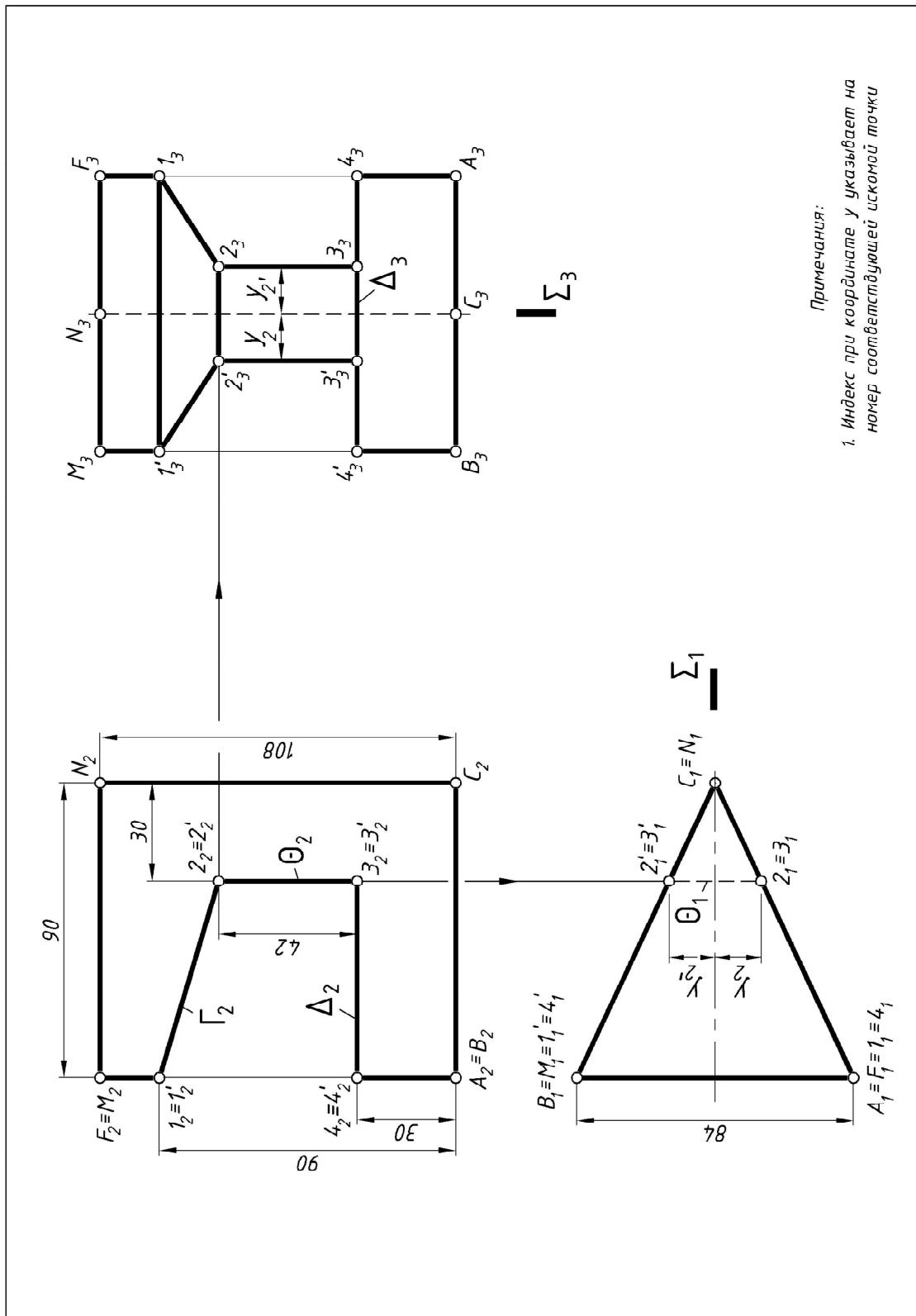


Рис. 1. Пример построения проекций прямой треугольной призмы с вырезом

За базовую плоскость отсчета измерений в направлении оси  $y$  берем фронтальную плоскость  $\Sigma$  ( $\Sigma_1^*$ ,  $\Sigma_3^*$ ), проходящую через плоскость симметрии призмы. На чертеже горизонтальная проекция этой плоскости  $\Sigma_1$  – вырожденная, совпадает с осью симметрии горизонтальной проекции призмы, профильная проекция  $\Sigma_3$  – с осью симметрии профильной проекции призмы. Профильная проекция призмы строится на произвольном расстоянии от фронтальной проекции исходя из рациональной компоновки чертежа.

Профильные проекции точек соединяют между собой линиями в таком же порядке, как это выполнено на горизонтальной плоскости проекций.

Плоскость  $\Theta$  – профильная. Ее профильную проекцию определяет прямоугольник  $2_3 3_3 3'_3 2'_3$  – натуральная величина плоскости  $\Theta$ .

Плоскость  $\Delta$  – горизонтальная. Ее фронтальная проекция – отрезок прямой линии  $4_2 6_2$ , профильная проекция – отрезок  $4_3 4'_3$ . Без искажения эта плоскость проецируется на горизонтальную плоскость  $4_1 3_1 4'_1 3'_1$ .

## 2. Построение проекций пирамиды с вырезом плоскостями частного положения

На рис. 2 изображена правильная четырехугольная пирамида с вырезом, образованным тремя плоскостями: фронтально-проецирующей  $\Gamma$  ( $\Gamma_2^*$ ), профильной  $\Theta$  ( $\Theta_2^*$ ,  $\Theta_1^*$ ) и горизонтальной  $\Delta$  ( $\Delta_2^*$ ,  $\Delta_3^*$ ). Фронтальная проекция линии выреза задана фронтальными проекциями  $\Delta$ ,  $\Theta$ ,  $\Gamma$ , на которых проекции точек 1 ( $1_2$ ), 2 ( $2_2$ ), 5 ( $5_2$ ), 6 ( $6_2$ ) находятся на ребрах пирамиды, проекции точек 3 ( $3_2$ ) и 4 ( $4_2$ ) – на линиях пересечения вырожденных проекций плоскостей выреза.

При заданной фронтальной проекции пирамиды следует достроить горизонтальную проекцию и построить профильную.

Плоскость  $\Delta$  пересекает поверхность пирамиды по фигуре, подобной основанию, так как она параллельна основанию. В вырезе ее часть ограничена контуром 6544'5', где отрезок 44' является линией пересечения плоскостей  $\Delta$  и  $\Theta$ . Горизонтальная проекция точки 6 определяется непосредственным проецированием ее на горизонтальную проекцию ребра  $SA$ . Базовая плоскость измерений  $\Sigma$  ( $\Sigma_1^*$ ,  $\Sigma_3^*$ ) совпадает с осью симметрии горизонтальной и профильной проекций пирамиды.

Горизонтальные проекции точек 5 и 5' находим по их профильным проекциям из условия принадлежности их ребрам  $SD$  и  $SB$ , используя значения  $y_5, y'_5$ . При построении профильных проекций точек 4, 4' по заданным фронтальной и горизонтальной проекциям необходимо использовать параметры  $y_4$  и  $y'_4$ .

Плоскость  $\Theta$  пересекает поверхность пирамиды по четырехугольнику 33'4'4. Отрезок 33' является линией пересечения плоскостей  $\Theta$  и  $\Gamma$ .

Боковые грани пирамиды являются плоскостями общего положения. Точка 3 построена на грани  $SCD$  с помощью прямой  $t$ , которая проведена через точку 3 и параллельна стороне основания  $DC$  этой грани. По фронтальной и горизонтальной проекциям точки 3 построена ее профильная проекция, для чего использована координата  $y_3$ , отмеренная от базовой плоскости  $\Sigma$ .

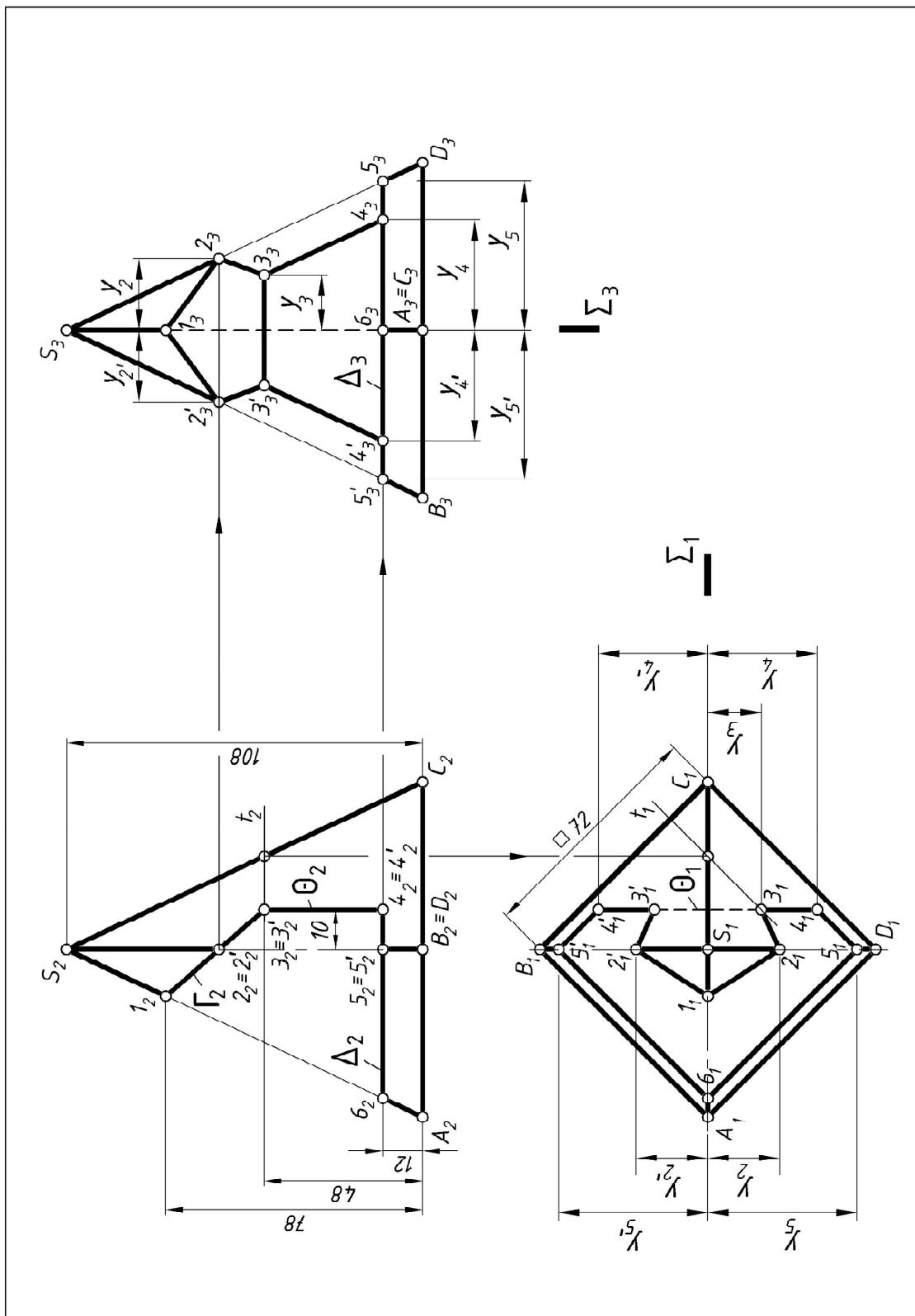


Рис. 2. Пример построения проекции пирамиды с вырезом

Фронтально-проецирующая плоскость  $\Gamma$  пересекает поверхность пирамиды по пятиугольнику 1233'2'. Горизонтальная проекция точки 1 построена непосредственным проецированием ее на горизонтальную проекцию ребра  $SA$ . Профильная проекция точки 1 принадлежит профильной проекции ребра  $SA$ . Горизонтальные проекции точек 2 и 2', принадлежащих ребам  $SD$  и  $SD'$ , найдем по профильной проекции, для чего используются координаты  $y_2$  и  $y_2'$  точек 2 и 2'.

Последовательно соединяя горизонтальные и профильные проекции точек, получаем проекции плоскости выреза  $\Gamma(1233'2'1)$ .

### 3. Построение проекций цилиндра с вырезом плоскостями частного положения

На рис. 3 приведен пример построения проекций прямого кругового (горизонтально-проецирующего) цилиндра с вырезом, выполненным тремя плоскостями.

Фронтально-проецирующая плоскость  $\Gamma(\Gamma_2^*)$  пересекает цилиндр по части эллипса, на которой отмечены характерные точки (4, 5, 8) и случайные (6, 7). Профильная плоскость  $\Theta(\Theta_2^*, \Theta_1^*)$  пересекает цилиндрическую поверхность по прямоугольнику 344'3'. Горизонтальная плоскость  $\Delta(\Delta_2^*, \Delta_3^*)$  перпендикулярна оси цилиндра и пересекает цилиндрическую поверхность по части окружности 3212'3'. Фронтальная проекция линии сечения плоскостями  $\Delta$ ,  $\Theta$  и  $\Gamma$  с обозначенными характерными точками принадлежит вырожденным фронтальным проекциям этих плоскостей, а горизонтальные проекции характерных точек этой линии принадлежат вырожденной проекции цилиндра – окружности.

Напомним, что боковая поверхность прямого кругового цилиндра в данном случае горизонтально-проецирующая и ее вырожденная проекция (окружность) обладает собирательным свойством. Следовательно, горизонтальная проекция точек и линий, принадлежащих боковой поверхности, совпадает с горизонтальной проекцией боковой поверхности цилиндра – окружностью.

Линия  $2_3 2'_3$  представляет собой профильную (вырожденную) проекцию плоскости  $\Delta$ . За базовую плоскость для отсчета координаты  $y$  выбрана фронтальная плоскость  $\Sigma(\Sigma_1^*, \Sigma_3^*)$ , проходящая через ось вращения цилиндра.

По двум проекциям точек линии выреза строят ее профильную проекцию. Полученные точки соединяют в последовательности, определяемой фронтальной проекцией. Так как в цилиндре выполнен вырез, то на профильной проекции цилиндра отсутствуют части очерковых образующих между проекциями точек  $2_3, 5_3$  и  $2'_3, 5'_3$ .

Кроме того, на профильной проекции необходимо провести линии пересечения плоскостей  $\Theta$  и  $\Gamma$  – прямую  $4_3 4'_3$  и плоскостей  $\Delta$  и  $\Theta$  – прямую  $3_3 3'_3$ . Обводим чертеж соответствующими линиями, оставляя необходимые линии построений.

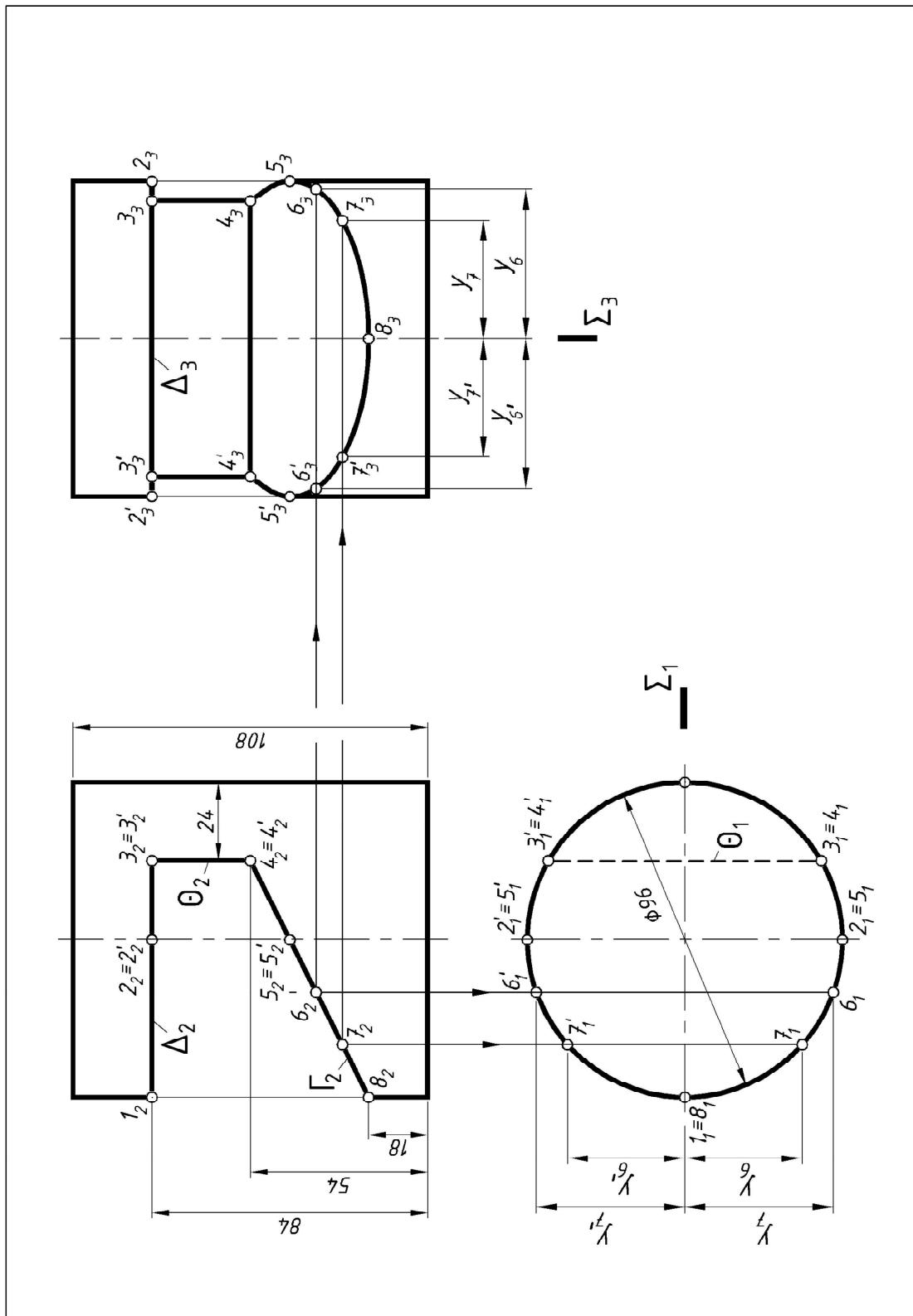


Рис. 3. Пример построения проекций прямого цилиндра с вырезом

#### **4. Построение проекций прямого кругового конуса с вырезом, выполненным плоскостями частного положения**

На рис. 4 приведен пример построения проекций прямого кругового конуса, поверхность которого – поверхность общего положения. Вырез выполнен тремя секущими плоскостями. Плоскость  $\Gamma (\Gamma_2^*)$ , параллельная одной образующей конуса, пересекает его поверхность по параболе с вершиной в точке 1; плоскость  $\Delta (\Delta_2^*, \Delta_3^*)$ , перпендикулярная к оси конуса, – по части окружности; плоскость  $\Theta (\Theta_2^*, \Theta_1^*)$ , параллельная двум образующим конуса, пересекает поверхность конуса по гиперболе с вершиной в точке 8.

Фронтальная проекция линии выреза принадлежит фронтальным проекциям  $\Gamma_2, \Delta_2, \Theta_2$  данных плоскостей, на которых намечены проекции точек 1<sub>2</sub>–8<sub>2</sub> линии выреза. Горизонтальные проекции этих точек 1<sub>1</sub>–8<sub>1</sub> построены по их фронтальным проекциям из условия их принадлежности конической поверхности, для чего использованы параллель-окружности поверхности, проводимые через эти точки на конической поверхности. Плоскости выреза пересекаются между собой по отрезкам прямых линий, перпендикулярных плоскости  $\Pi_2$  и проецирующихся на ней в проекции точек 6<sub>2</sub>6'\_2 и 4<sub>2</sub>4'\_2, а на плоскость  $\Pi_1$  в отрезки 6<sub>1</sub>6'\_1 – видимый и 4<sub>1</sub>4'\_1 – невидимый.

Плоскость  $\Gamma$  – фронтально-проецирующая, параллельная одной образующей, поэтому на горизонтальную и профильную плоскость проекций проецируется в виде одинакового по форме, но разного по размерам контура, который ограничен отрезком прямой линии 44 пересечения плоскостей  $\Gamma$  и  $\Delta$  и параболы. Для построения линии пересечения поверхности конуса плоскостью  $\Gamma$  на поверхности конуса, на ее заданной проекции, намечают ряд точек, количество которых обеспечивает необходимую точность и определяет характер линии.

Фронтальные проекции случайных точек  $A$  и  $A'$  выбраны произвольно, но ближе к вершине параболы (точка 1). Горизонтальные проекции точек  $A_1$  и  $A'_1$  построены с помощью параллель-окружности радиуса  $R_A$ , проведенной через эти точки на конической поверхности. Профильные проекции  $A_3 A'_3$  определены по горизонтальной проекции при помощи значений  $y_A$  и  $y_{A'}$ . Горизонтальные проекции случайной точки  $B$  определены с помощью параллель-окружности радиуса  $R_B$  (см. рис. 4)

Фронтальная проекция характерной точки 1 (1<sub>2</sub>) принадлежит фронтальной очерковой конуса. Ее горизонтальная и профильная проекция – горизонтальная и профильная проекции фронтальной очерковой. Профильные проекции характерных точек 2 и 2'(2<sub>3</sub> и 2'\_3) лежат на профильной проекции очерковых образующих конуса. По профильным проекциям этих точек находим их горизонтальные проекции, используя координаты  $y_2$  и  $y'_2$

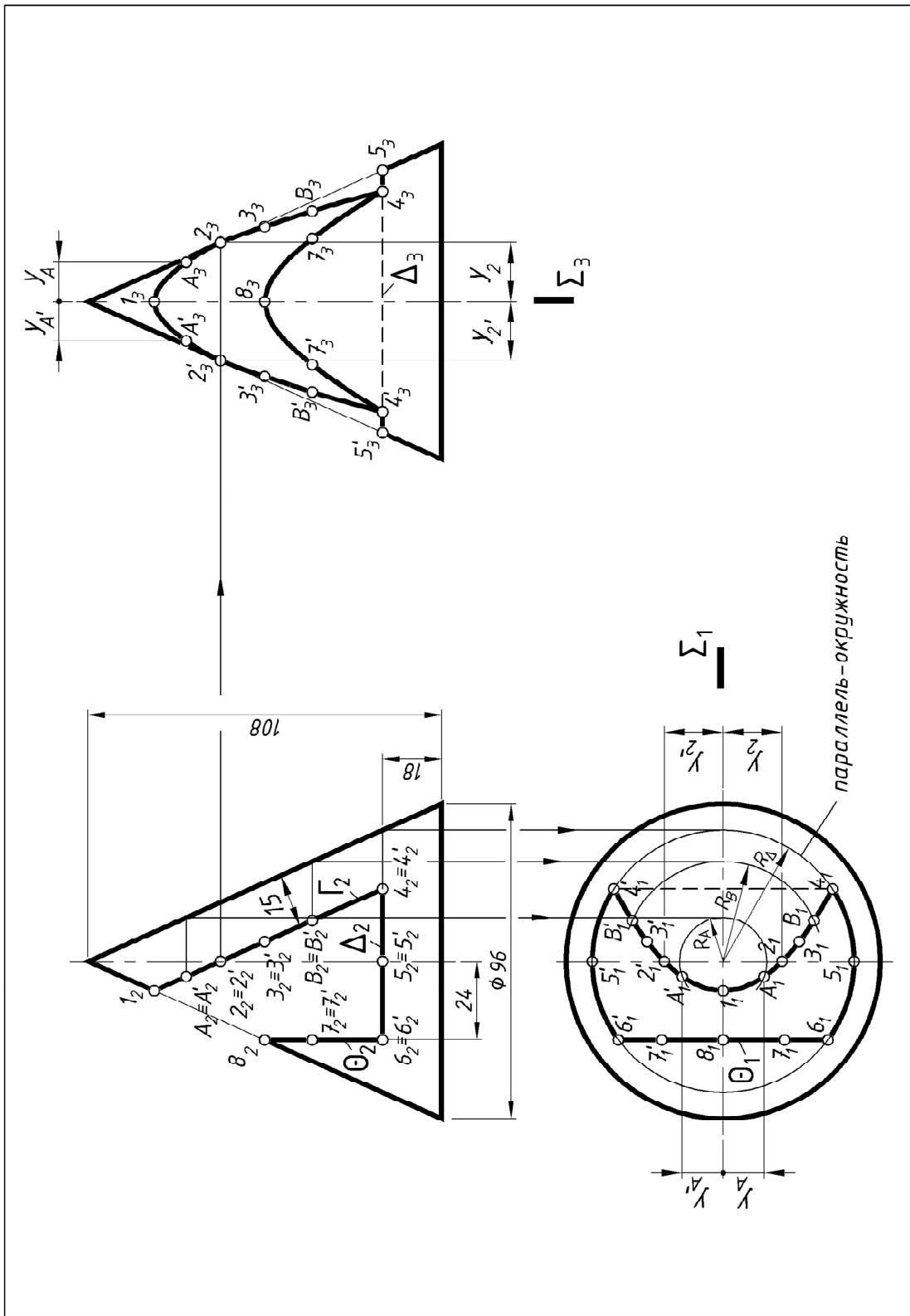


Рис. 4. Пример построения проекций прямого кругового конуса с вырезом

Горизонтальная плоскость выреза  $\Delta$  пересекает поверхность конуса по двум дугам окружности радиусом  $R_\Delta$  и отрезкам прямых  $44'$  и  $66'$  линий пересечения плоскостей  $\Gamma$  и  $\Delta$ ,  $\Delta$  и  $\Theta$ . Таким образом, горизонтальная проекция плоскости  $\Delta$  представляет собой неискаженный контур, ограниченный двумя дугами окружности и двумя отрезками прямых линий. Профильная проекция этой плоскости выреза – отрезок прямой линии  $5_35'_3$ , заключенный между крайними (очерковыми) профильными образующими конуса.

## 5. Проекции шара

Ортогональная проекция шара – круг. Любая плоскость пересекает поверхность шара по окружности. В зависимости от положения секущей плоскости относительно плоскостей проекций  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  окружность сечения может проецироваться в отрезок прямой линии, окружность или эллипс.

На рис. 5 изображен шар в ортогональных проекциях, в которых выполнен вырез плоскостями  $\Delta$  ( $\Delta_2^*$ ,  $\Delta_3^*$ ),  $\Theta$  ( $\Theta_2^*$ ,  $\Theta_1^*$ ),  $\Gamma$  ( $\Gamma_2^*$ ).

Горизонтальная плоскость  $\Delta$  пересекает поверхность шара по части окружности 123 радиусом  $O'_2, l_2$ , которая на горизонтальную плоскость проекций проецируется в натуральную величину, то есть в замкнутый контур, ограниченный дугой окружности  $3_12_11_21'_13'_1$  и отрезком прямой линии  $3_13'_1$  пересечения плоскостей выреза  $\Delta$  и  $\Theta$ .

На профильную плоскость проекций эта плоскость проецируется (вывождается) в отрезок прямой линии  $2_32'_3$ .

Профильная плоскость  $\Theta$  пересекает поверхность шара по части окружности 345 радиусом  $R_\Theta$ , которая проецируется на плоскость  $\Pi_3$  в виде замкнутого контура, ограниченного двумя дугами окружности  $3_34_35_3$  и  $3'_34'_35'_3$ , а также двумя отрезками прямых  $3_33'_3$  и  $5_35'_3$  пересечения плоскостей  $\Delta$  и  $\Theta$ ,  $\Theta$  и  $\Gamma$ . На горизонтальную плоскость проекций  $\Pi_1$  линия пересечения этой плоскости с поверхностью шара проецируется в отрезок прямой линии  $4_14'_1$ .

Линией пересечения поверхности шара с плоскостью  $\Gamma$  является окружность, радиус которой – отрезок  $0''_29_2$ . Центр этой окружности  $0''(0''_20''_1)$  определяется в пересечении перпендикуляра, опущенного из центра сферы на данную плоскость. Горизонтальная и профильная проекции этой окружности – эллипсы. Большие полуоси эллипсов  $0''_16_1$  и  $0''_36_3$  равны радиусу окружности  $0''_29_2$ . Построение проекций эллипсов сводится к построению необходимого количества случайных точек, которые в горизонтальных и профильных проекциях строятся исходя из принадлежности их поверхности шара, то есть с помощью параллель-окружностей, проходящих через эти точки, однако, в первую очередь, необходимо найти характерные (опорные) точки.

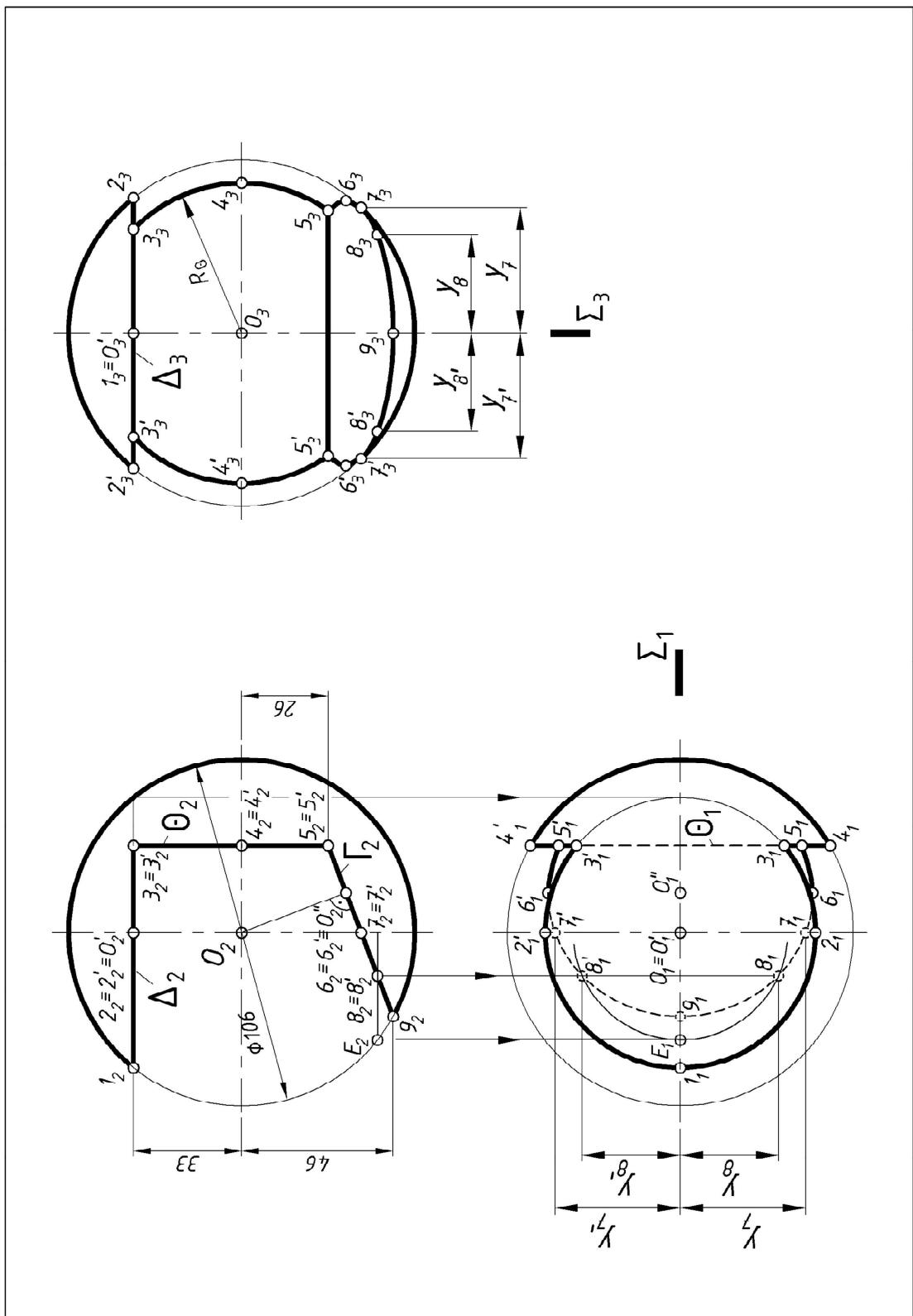


Рис. 5. Пример построения проекции шара с вырезом

Точки 9 и 1 являются характерными, так как лежат на очерковых образующих шара. В данном примере характерная точка 9 принадлежит фронтальной очерковой. Профильные проекции точек 7 и 7' ( $7_3$  и  $7'_3$ ) лежат на профильной очерковой шара – окружности. По профильным проекциям этих точек находим (измерив) их горизонтальные проекции  $7_1$ ,  $7'_1$ , используя координаты  $y_7$  и  $y'_{7'}$ .

Для построения горизонтальных проекций случайных точек 8 и 8' через них проведена параллель-окружность, радиус которой определяется точкой  $E$  ( $E_2$ ,  $E_1$ ), принадлежащей фронтальной очерковой шара. Для построения профильных проекций точек 8 и 8' ( $8_3$  и  $8'_3$ ) использованы значения  $y_8$  и  $y'_{8'}$ . Определив на плоскости  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$  достаточное количество точек, соединяем их на каждой плоскости плавной кривой (с помощью лекала) с учетом видимости.

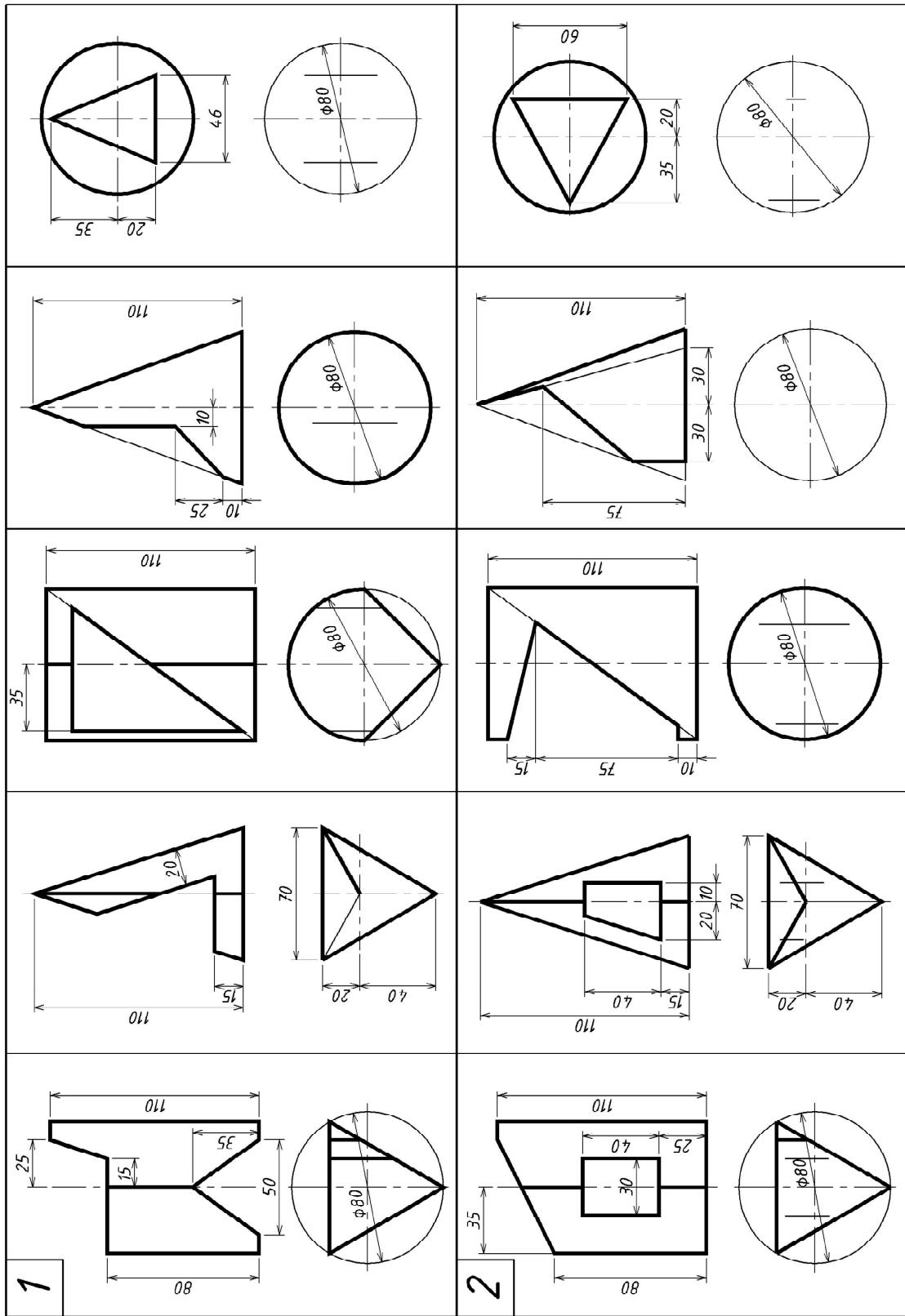
Заметим, что плоскость  $\Gamma$  проецируется на плоскость  $\Pi_2$  отрезком прямой линии, а на плоскости  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$  – с искажением, в виде замкнутого контура, ограниченного дугой эллипса и отрезком прямой линии  $55'(5_15'_1$  и  $5_35'_3)$  пересечения плоскостей  $\Gamma$  и  $\Theta$ . На профильной проекции шара между точками  $2_3$  и  $7_3$ ,  $2'_3$  и  $7'_3$  отсутствует профильная очерковая шара.

## **СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. ЕСКД. Основные надписи: ГОСТ 2.104-2006.
2. ЕСКД. Форматы: ГОСТ 2.301-68.
3. ЕСКД. Масштабы: ГОСТ 2.302-68.
4. ЕСКД. Линии: ГОСТ 2.303-68.
5. ЕСКД. Шрифты чертежные: ГОСТ 2.304-81.
6. ЕСКД. Изображения – виды, разрезы, сечения: ГОСТ 2.305-2008.
7. ЕСКД. Нанесение размеров и предельных отклонений: ГОСТ 2.307-2011.
8. Крылов, Н. Н. Начертательная геометрия / Н. Н. Крылов, Г. С. Иконников, В. Л. Николаев. – М.: Высшая школа, 2002. – 224 с
9. Виноградов, В. Н. Начертательная геометрия / В. Н. Виноградов. – Минск: Амалфея, 2001. – 368 с.
10. Георгиевский, О. В. Начертательная геометрия : сборник задач с решениями типовых примеров / О. В. Георгиевский. М.: Астрель-АСТ, 2002. – 278 с.
11. Фролов, С. А. Начертательная геометрия / С. А. Фролов. – М., 2002. – 240 с.
12. Чекмарев, А. А. Начертательная геометрия и черчение / А. А. Чекмарев. – М., 2005. – 200 с.
13. Начертательная геометрия: конспект лекций: в 2 ч. / Ю. И. Садовский [и др.]; под ред. В. В. Тарасова. – Минск: БНТУ, 2010. – Ч.1: Метод Монжа. Позиционные задачи. – 88 с.
14. Методическое пособие с элементами программированного обучения по курсу «Начертательная геометрия» для студентов строительных специальностей / З. И. Александрович [и др.]; под общ. ред. З. И. Александрович. – Минск: БГПА, 1994. – 66 с. – Часть 1: Позиционные задачи.
15. Уласевич, З. Н. Начертательная геометрия / З. Н. Уласевич. – М., 2009. – 180 с.
16. Шуберт, И. М. Индивидуальные задания по начертательной геометрии и методические указания по решению и оформлению расчетно-графических работ : учебно-методическое пособие / И. М. Шуберт, О. Н. Касаткина, Ю. И. Садовский. – Минск: БНТУ, 2014. – 78 с.

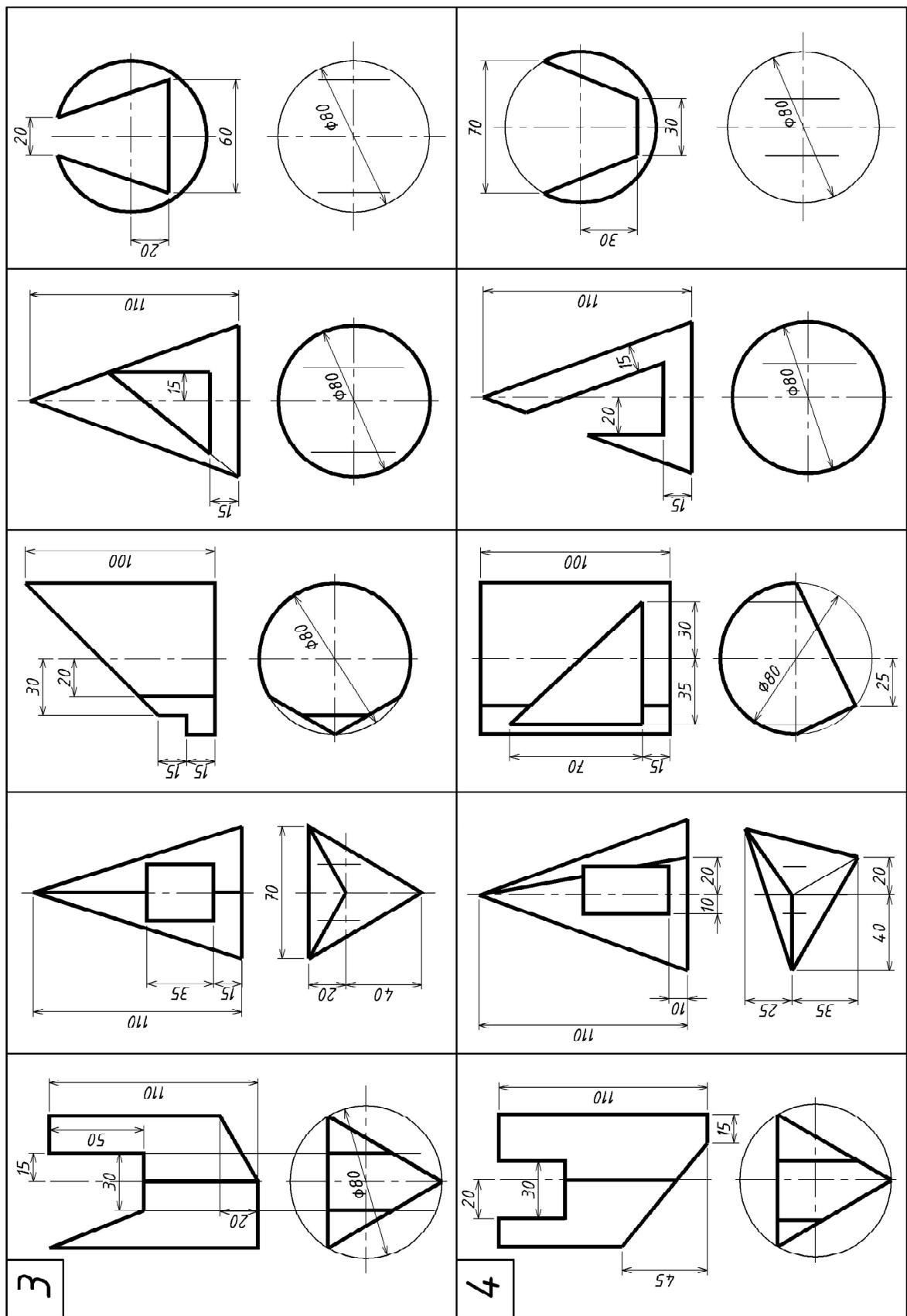
## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

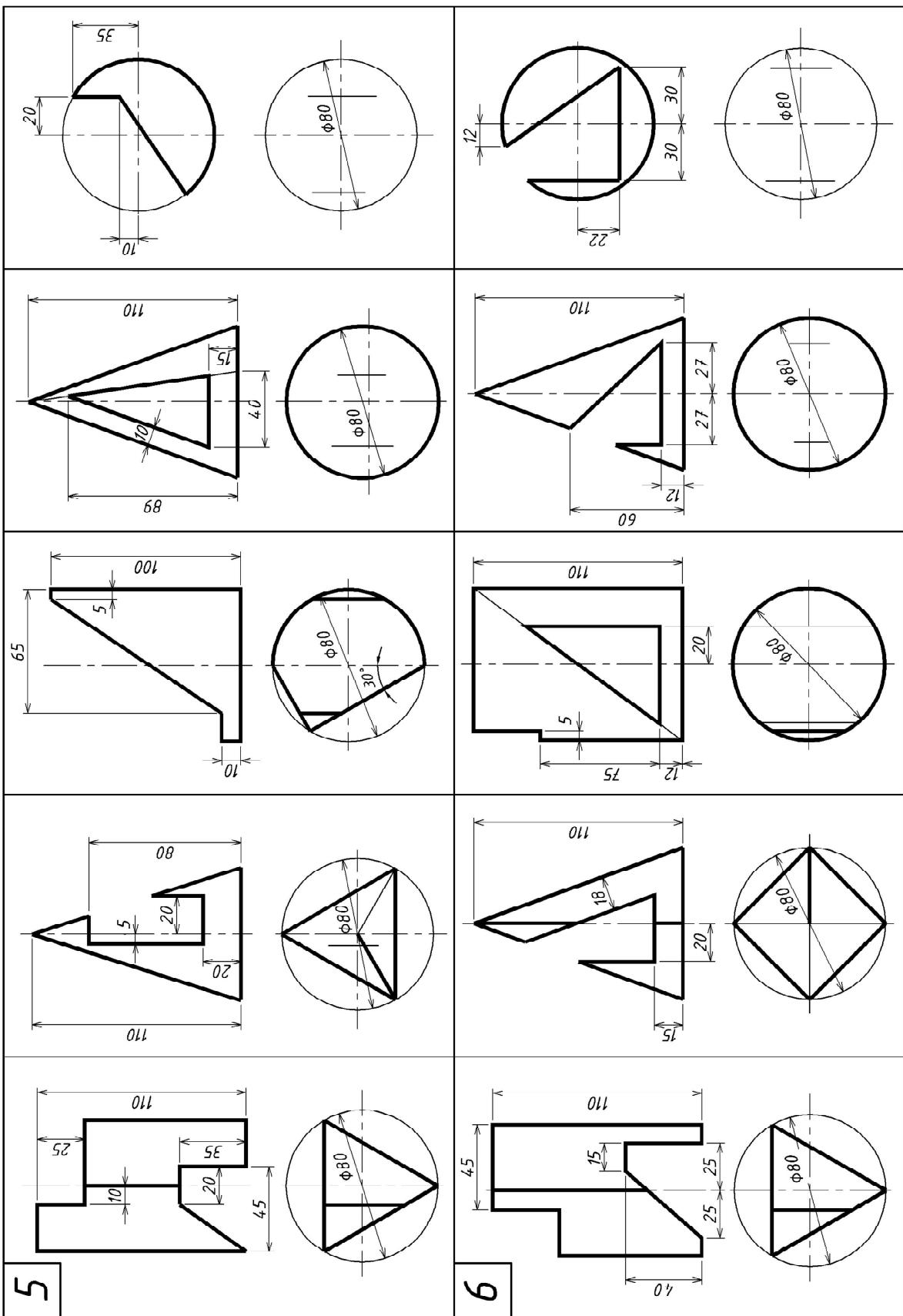
### Варианты заданий



**1**

**2**





## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### Примеры выполнения заданий

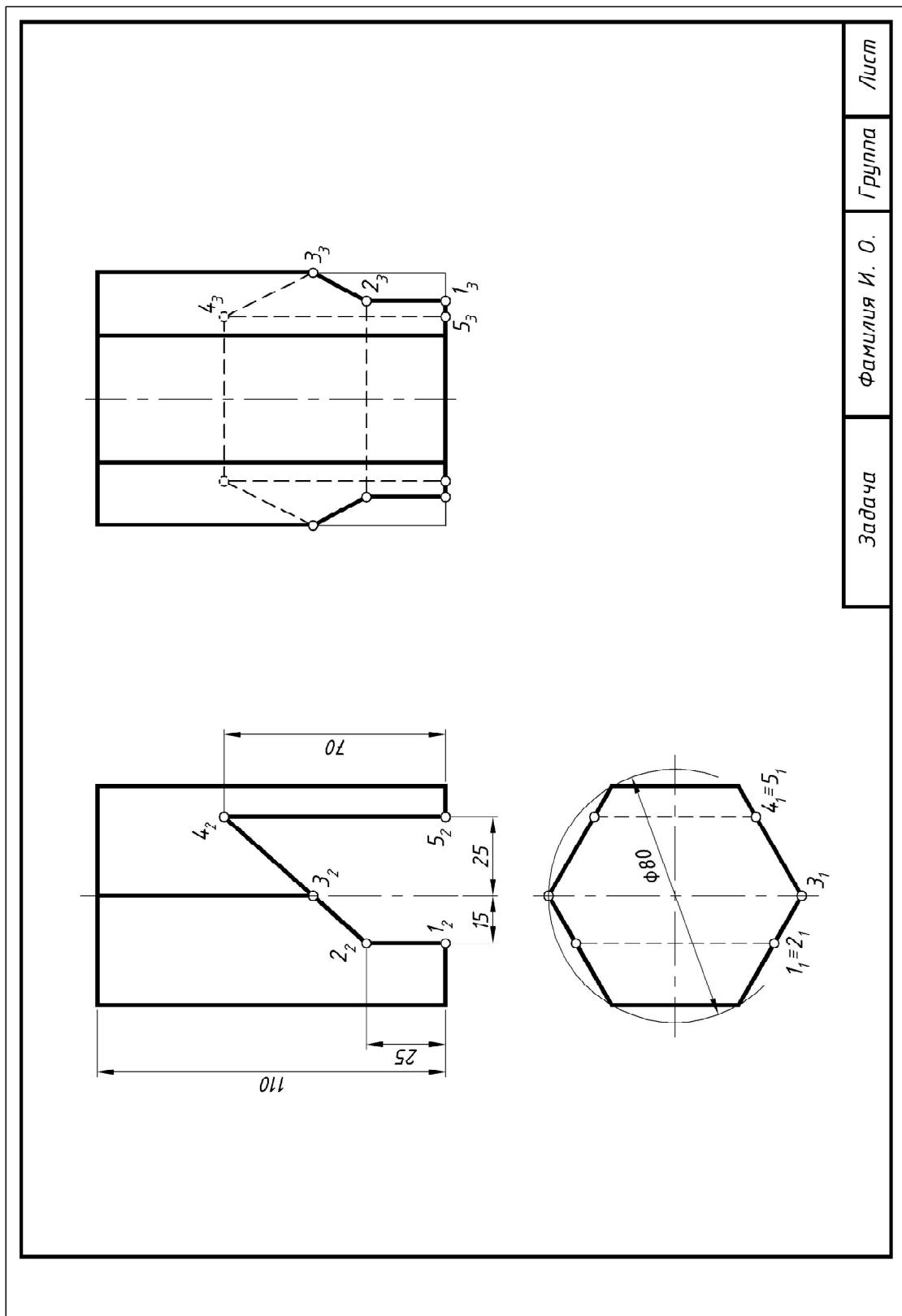


Рис. II .1

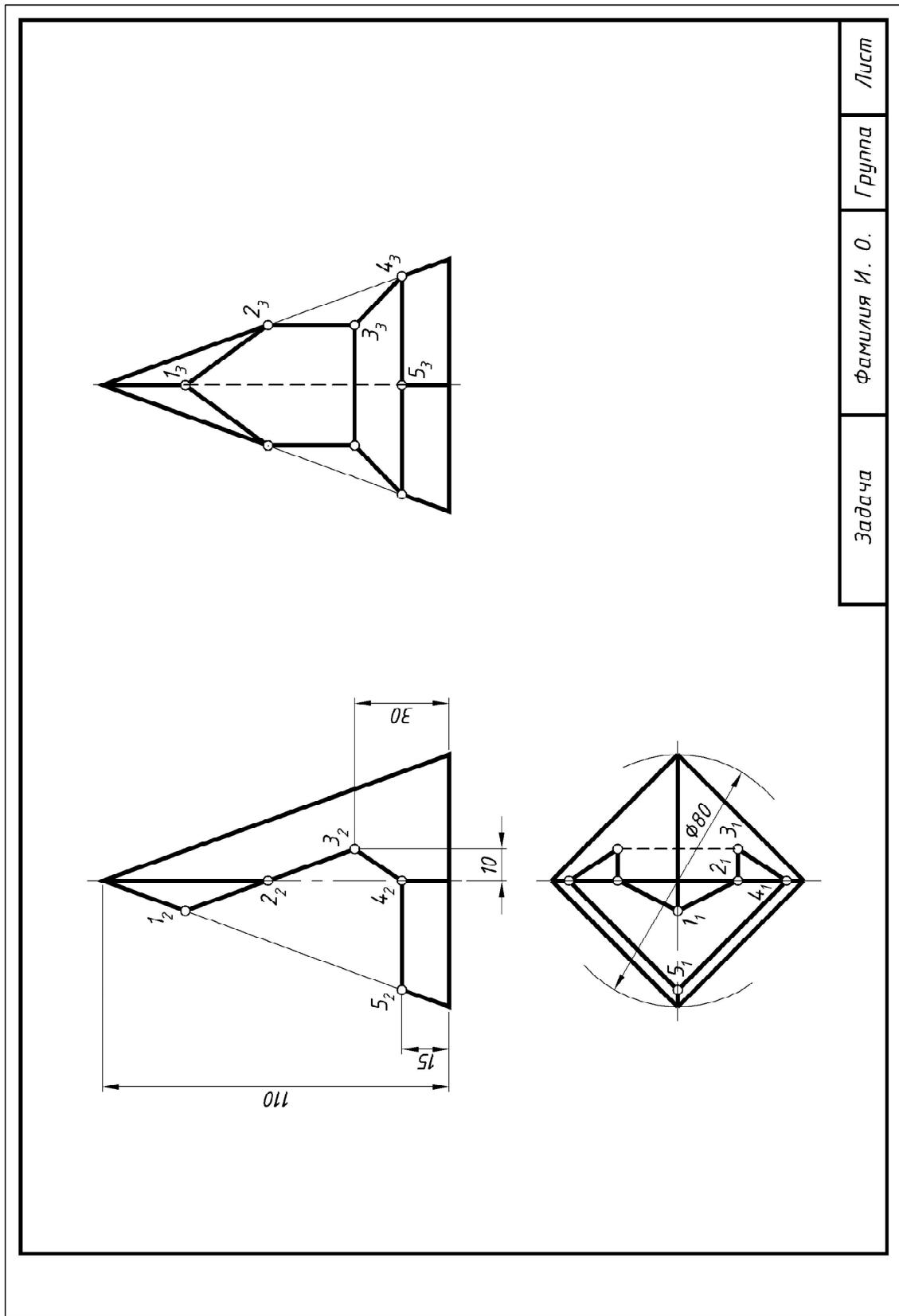


Рис. II 2

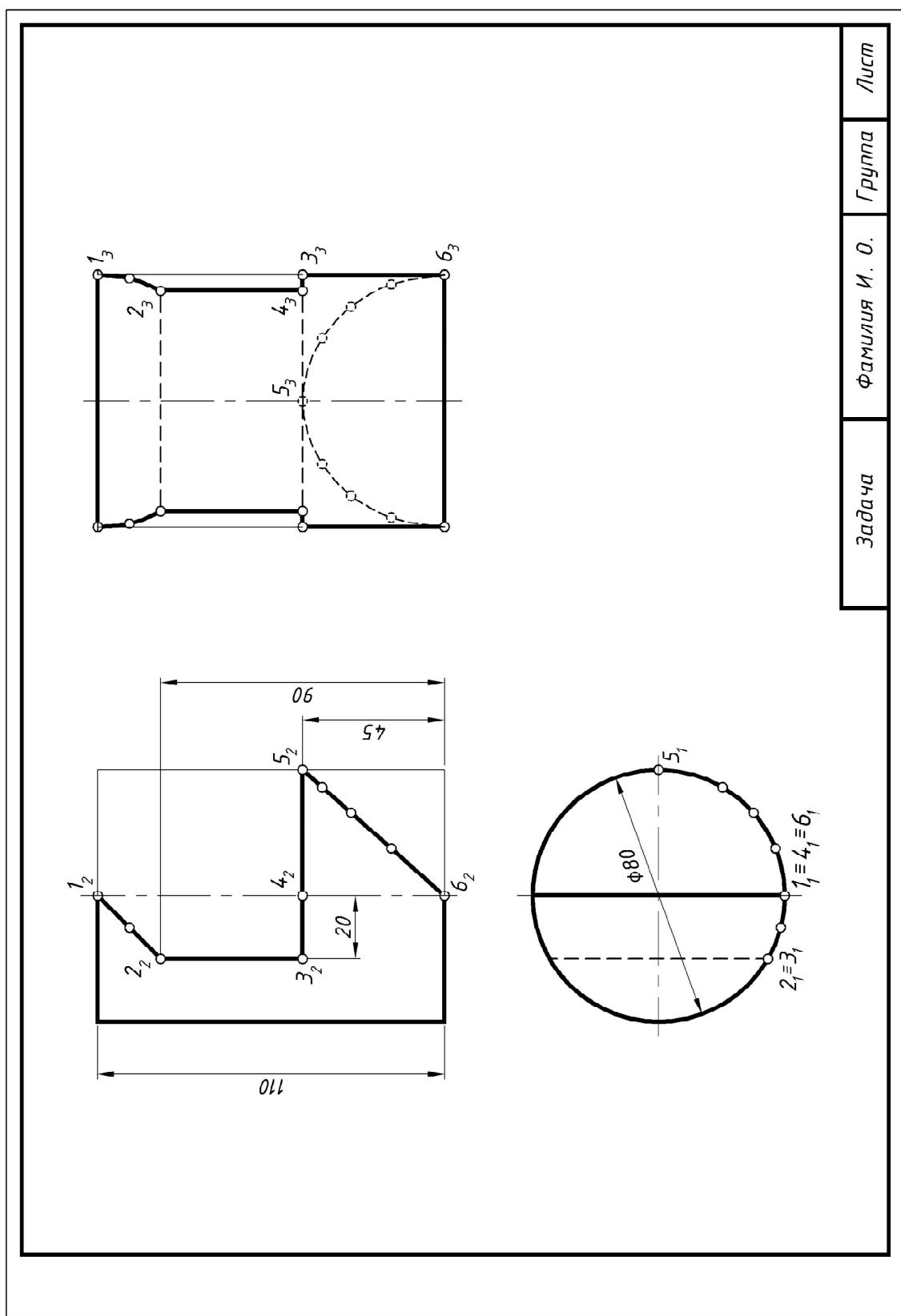


Рис. II 3

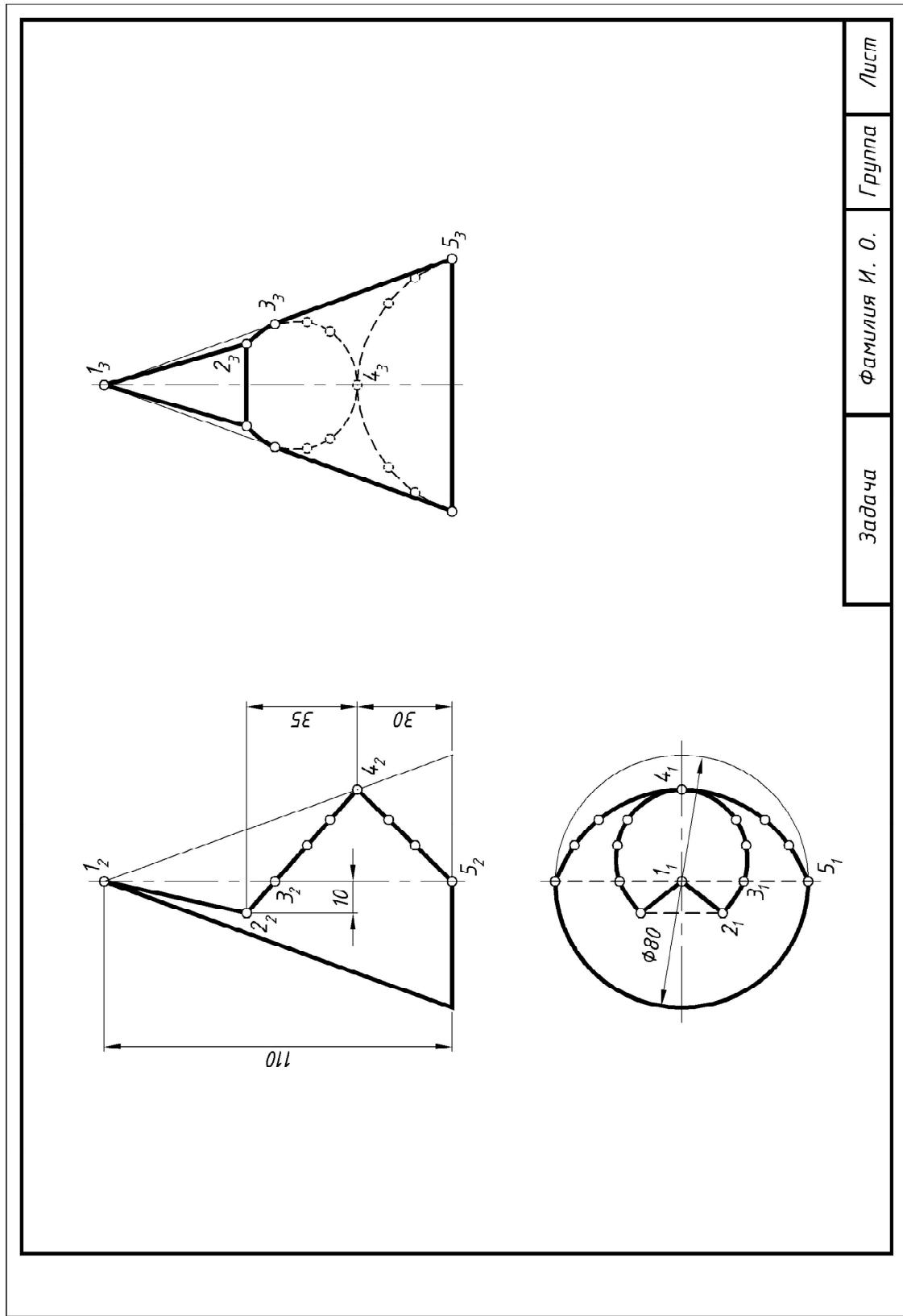


Рис. II 4

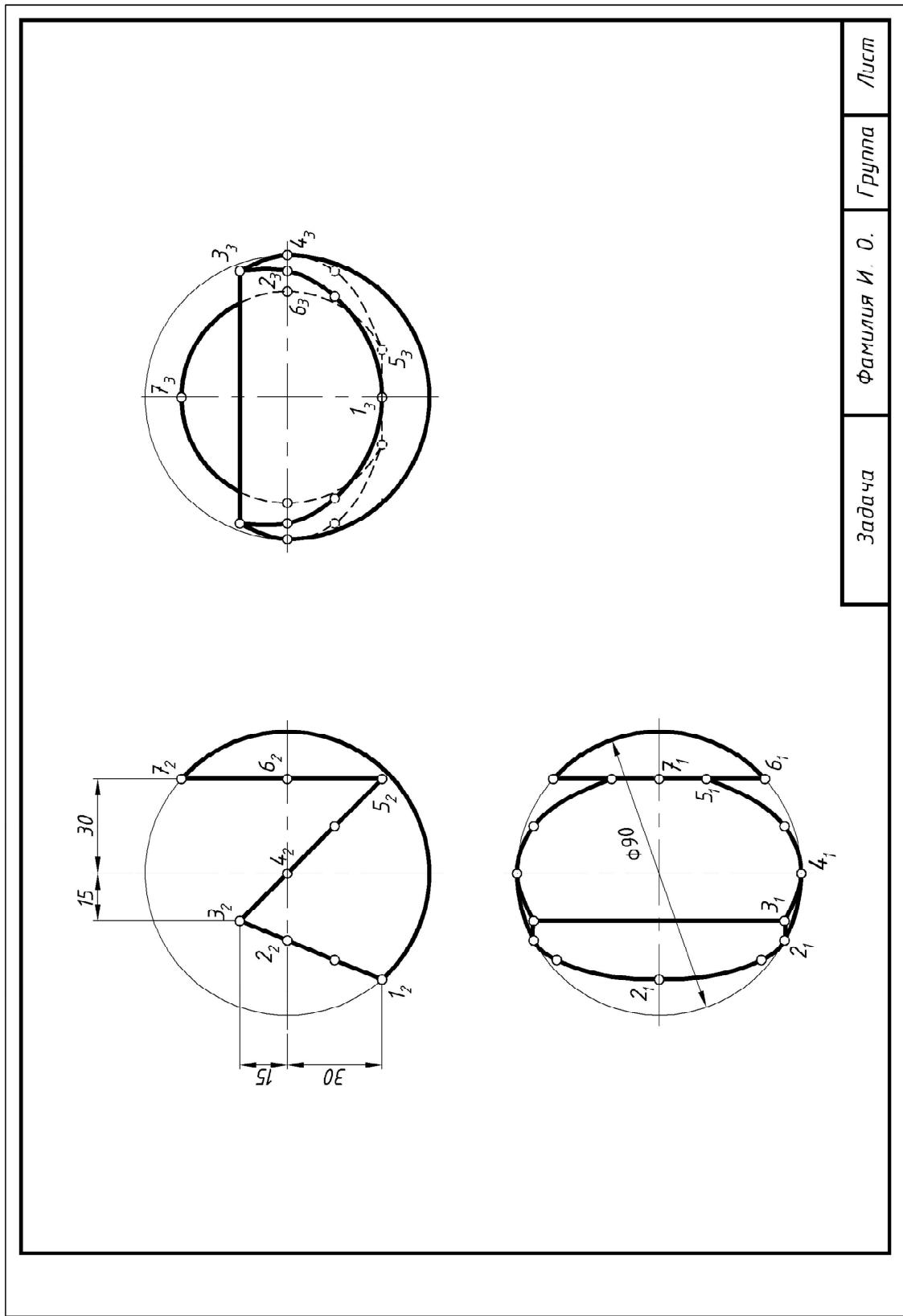


Рис. II .5