

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Объект авторского права  
УДК 624.072.2.04+624.073.2+539.3

**СКАЧЁК**  
**Павел Дмитриевич**

**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ  
НА КОНТАКТНЫХ ПЛОЩАДКАХ БАЛОЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ,  
ЧАСТИЧНО ОПИРАЕМЫХ НА УПРУГОЕ ОСНОВАНИЕ**

Автореферат диссертации  
на соискание ученой степени кандидата технических наук  
по специальности 05.23.17 – строительная механика

Минск, 2023

Научная работа выполнена в Белорусском национальном техническом университете.

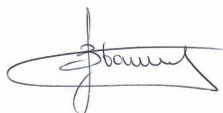
- Научный руководитель: **БОСАКОВ Сергей Викторович**,  
доктор технических наук, профессор,  
профессор кафедры «Математические методы в строительстве» БНТУ
- Официальные оппоненты: **СИДОРОВИЧ Евгений Мечиславович**,  
доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Геотехника и строительная механика» БНТУ;  
**ШИМАНОВСКИЙ Александр Олегович**,  
доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Техническая физика и теоретическая механика» БелГУТ
- Оппонирующая организация: Учреждение образования «Брестский государственный технический университет»

Защита состоится 28 декабря 2023 г. в 11.00 на заседании совета по защите диссертаций Д 02.05.09 при Белорусском национальном техническом университете по адресу: 220013, Республика Беларусь, г. Минск, проспект Независимости, 65, корпус 1, аудитория 202. Телефон ученого секретаря: +375172729697; e-mail: bondar@bntu.by.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского национального технического университета.

Автореферат разослан « 27 » ноября 2023 года.

Ученый секретарь совета  
по защите диссертаций Д 02.05.09  
кандидат технических наук, доцент



В. В. Бондарь

## ВВЕДЕНИЕ

В инженерной практике расчет любой конструкции начинается с ее идеализации в рамках известной и наиболее подходящей для ее расчета теории: сопротивления материалов, строительной механики, теории упругости. Далее задаются граничные условия в виде условий закрепления конструкции и действующих на нее нагрузок. Идеализация последних представляет наиболее сложную задачу, поскольку нагрузка есть мера взаимодействия одной конструкции с другой, и не всегда возможно заранее установить характер этого взаимодействия. Так возникает класс задач, получивших название контактных.

В строительной отрасли места стыковки и взаимодействия конструкций принято называть узлами. При проектировании и строительстве зданий и сооружений указанные узлы сопряжения и опирания конструкций являются весьма ответственными участками. Как известно, при взаимодействии конструкций с разными механическими характеристиками узлы являются концентраторами напряжений. Примерами таких узлов являются места опирания балок и плит на несущие строительные конструкции. Для определения напряженно-деформированного состояния данных узлов необходимо решить контактную задачу.

В настоящее время при расчете и проектировании несущих строительных конструкций, балок и плит нормами предполагается, что в опорных узлах контактные напряжения распределяются по линейному закону, а в расчет вводится специальный коэффициент, зависящий от соотношения максимального и минимального контактного напряжения в границе области контакта. Однако при этом не учитывается характер распределения контактных напряжений по области контакта. Помимо всего прочего при изгибе балок и плит, свободно лежащих на несущих строительных конструкциях, в процессе их деформирования может произойти отрыв конца конструкции от поверхности контакта. Этот факт свидетельствует о конструктивной нелинейности данной задачи и сложности ее решения аналитическими методами. Определение фактических размеров области контакта, характера и интенсивности контактных напряжений влияет на напряженно-деформированное состояние всей свободно опираемой конструкции и ее дальнейший инженерный расчет.

До настоящего времени данный вопрос о действительном напряженно-деформированном состоянии контактных площадок мало изучен и требует более глубокого теоретического исследования.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### **Связь работы с научными программами (проектами), темами**

Диссертационные исследования выполнялись на кафедре «Математические методы в строительстве» в соответствии с программой Белорусского национального технического университета:

– ГБ 16-283 «Разработка методов оптимизации конструкций дорожных одежд» (2016–2020 гг.). Этап 5. Разработка оптимальных конструкций дорожных одежд жесткого типа в условиях Республики Беларусь;

– ГБ 21-245 «Совершенствование методов проектирования и строительства конструктивных элементов дорожной одежды» (2021–2025 гг.). Этап 1. Расчет изолированной прямоугольной плиты на упругом основании и узлов плит дорожного покрытия при их опирании на несущие мостовые конструкции.

### **Цель и задачи исследования**

**Целью** данной работы является определение напряженно-деформированного состояния на контактных площадках в местах свободного частичного опирания балочных элементов на упругое основание.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Выполнить аналитический обзор научно-технической литературы по расчету балок и плит на упругом основании, включая обзоры классических и неклассических моделей линейно-деформируемого упругого основания.

2. Построить математическую модель и методику расчета балочных элементов, частично опираемых на упругие четвертьплоскость, четвертьпространство и  $1/8$  пространства.

3. Разработать алгоритм раскрытия конструктивной нелинейности, возникающей при отрыве балочных элементов от опорных поверхностей упругого основания.

4. Получить выражение функции влияния  $1/8$  упругого изотропного пространства.

5. Определить распределения контактных напряжений в местах свободного частичного опирания балочных элементов на упругое основание и установить их зависимость от соотношения жесткостей опираемой и опорной конструкций.

6. Исследовать интегральные величины внутренних усилий и опорных реакций изгибаемых балочных элементов.

7. Верифицировать полученные результаты с известными аналитическими и численно-аналитическими решениями.

**Объект исследования:** контактные площадки свободного частичного опирания на упругое основание балочных элементов.

**Предмет исследования:** Напряженно-деформированное состояние на контактных площадках балочных элементов, частично опираемых на упругое основание, с учетом конструктивной нелинейности.

### **Научная новизна**

1. Впервые получено аналитическое выражение для определения вертикальных перемещений поверхности упругой  $1/8$  однородного изотропного пространства от действия сосредоточенной вертикальной силы.

2. Определены границы области контакта и установлен характер распределения контактных напряжений в местах частичного опирания балочных элементов на упругие четвертьплоскость, четвертьпространство и  $1/8$  пространства с учетом конструктивной нелинейности и физических свойств опорных поверхностей контактных площадок.

3. Установлена нелинейная взаимосвязь между опорными реакциями свободно опираемого балочного элемента и расчетного пролета от изгибной жесткости балочного элемента, упругих свойств материала и вида упругого основания.

4. Впервые установлено, что при свободном одновременном опирании балочного элемента на упругие  $1/8$  пространство и четвертьпространство или при несимметричном опирании на две  $1/8$  пространства возникает в балочном элементе (балке) постоянный по длине крутящий момент.

### **Положения, выносимые на защиту:**

1. Аналитическое выражение для определения вертикальных перемещений поверхности упругой  $1/8$  однородного изотропного пространства, нагруженной сосредоточенной вертикальной силой.

2. Методика определения контактных напряжений в местах свободного частичного опирания балочных элементов на упругое основание с учетом конструктивной нелинейности.

3. Результаты численного решения контактных задач по определению напряженно-деформированного состояния на контактных площадках в местах свободного частичного опирания балочных элементов на упругое основание.

4. Впервые обнаруженное явление возникновения постоянного по длине балочного элемента крутящего момента, несимметричность опорных реакций и точек их приложения для симметрично нагруженного и опертого балочного элемента на упругие основания различной деформативности.

### **Личный вклад соискателя ученой степени**

Положения, выносимые на защиту, итоги теоретических исследований, а также численные результаты получены соискателем ученой степени самостоятельно благодаря консультациям научного руководителя С. В. Босакова, который определял направления исследования, их цели и задачи, а

также принимал активное участие в обсуждении и анализе полученных решений.

### **Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов**

Основные результаты работы докладывались на:

– XXV Международном симпозиуме им. А. Г. Горшкова «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред», Вятчи РФ, 18–22 марта 2019 г.;

– III Международной научно-технической конференции «Теория и практика исследований и проектирования в строительстве с применением систем автоматизированного проектирования (САПР)», г. Брест, 28–29 марта 2019 г.;

– 75-й студенческой научно-технической конференции «Актуальные проблемы геотехники, экологии, защиты населения в чрезвычайных ситуациях и строительной механики», г. Минск, 13 мая 2019 г.;

– Второй Международной научно-технической конференции пам. ак. В. И. Моссаковского «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій», г. Днепр, Украина, 10–12 октября 2019 г.;

– Международной научно-технической конференции молодых ученых «Новые материалы, оборудование и технологии в промышленности», г. Могилев, 24–25 октября 2019 г.;

– Белорусско-китайском молодежном инновационном форуме «Новые горизонты – 2019», г. Минск, 12–13 ноября 2019 г.;

– X Международной научно-практической конференции «Проблемы безопасности на транспорте», г. Гомель, 26–27 ноября 2020 г.;

– XI Международной научно-практической конференции «Проблемы безопасности на транспорте», г. Гомель, 25–26 ноября 2021 г.;

– VIII Международном симпозиуме «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений», г. Тамбов, РФ, 17–21 мая 2023 г.

### **Опубликованность результатов диссертации**

Основные результаты по теме диссертации изложены в 21 печатном издании, 7 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, общим объемом 3,6 авторских листа, 14 – других публикаций (2 статьи, 12 тезисов докладов), общим объемом 1,7 авторских листа. Получены 1 акт внедрения в учебный процесс и 1 акт внедрения в производство.

### **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из терминов и определений, перечня сокращений и обозначений, введения, общей характеристики работы, 5 глав, заключения,

списка использованных источников и 1 приложения. Полный объем диссертации составляет 183 страницы, включая 110 рисунков и 28 таблиц. Список использованных источников содержит 200 наименований.

## ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В первой главе выполнен обзор имеющихся научных исследований по решению контактных задач, включая расчет конструкций на упругом основании. При этом внимание уделено неклассическим моделям упругого основания и методам расчета балок и плит на упругом основании.

Значительный вклад в развитие аналитических методов решения контактных задач внесли фундаментальные труды советских ученых – А. Н. Динника, Н. М. Беляева, А. И. Лурье, И. И. Воровича, В. М. Александрова, Г. Я. Попова, В. И. Моссаковского, Н. И. Мухелишвили, И. Н. Векуа, Н. П. Векуа, С. Г. Михлина, Л. А. Галина, И. Я. Штаермана, Д. И. Шермана, В. Л. Рвачева, а также зарубежных математиков и механиков К. Каттанео, Н. Губера, Р. Д. Миндлина, А. Синьорини и др. В свою очередь, существенный вклад в процесс возникновения, развития и совершенствования теории расчета балок и плит на упругом основании внесли и достаточно хорошо осветили в своих работах Б. Н. Жемочкин, А. А. Сеницын, Е. А. Палатников, М. И. Горбунов-Посадов, В. И. Соломин, Б. Г. Коренев, И. М. Рабинович, С. Н. Клепиков, Г. А. Галин, Н. А. Цытович и др. Отдельно в данной главе уделяется внимание исследованиям Y. Weitsman, P. Villaggio, Z. Celep, I. Comez, V. Kahya, R. Erdol и А. Т. Маруфия по решению контактных задач с заранее неизвестной областью контакта или неполного контакта фундаментной конструкции с основанием.

Проведенный анализ трудов отечественных и зарубежных авторов позволил сформулировать цели и задачи диссертационного исследования.

Во второй главе осуществлена постановка плоской и пространственных контактных задач свободного частичного опирания на упругое основание балочных элементов с построением их математических моделей. На примере плоской задачи показано, что в общем случае решение рассматриваемых в работе контактных задач сводится к решению интегро-дифференциального уравнения особого вида, содержащего обобщенные функции, и что получить аналитическое решение данного уравнения пока невозможно.

Впервые получено аналитическое выражение, представленное в элементарных функциях, для определения вертикальных перемещений поверхности  $1/8$  упругого изотропного пространства от нормального действия на ее грани сосредоточенной вертикальной силы.

Плоская контактная задача решается в случае свободного опирания на упругие основания балочного элемента в виде балочной плиты, находящейся в условиях плоской деформации, а пространственные контактные задачи решаются при свободном опирании балочного элемента (балки) на упругие четвертьпространство и  $1/8$  пространства. При этом рассмотрено три принципиально различных случая опирания:

- слева и справа на упругие основания, моделируемые четвертьпространством;
- слева и справа на края упругих оснований, моделируемых  $1/8$  пространства;
- слева на упругое основание в виде  $1/8$  пространства, а справа на упругое основание в виде четвертьпространства.

Построение математических моделей рассматриваемых контактных задач осуществляется при следующих допущениях:

- для балочной плиты, работающей в условиях плоской деформации, и балок считаются справедливыми гипотезы изгиба балок;
- в контактной зоне не учитываются касательные напряжения;
- при рассмотрении плоской контактной задачи упругие основания принимаются в виде четвертьплоскостей, а при рассмотрении пространственных – упругих четвертьпространства и  $1/8$  пространства;
- контакт между балочным элементом и основанием односторонний, другими словами, связи, моделирующие контакт, работают только на сжатие;
- линейно-упругая (геометрическая и физическая линейность) работа упругого основания и балочного элемента.

Для решения поставленных контактных задач используется метод Б. Н. Жемочкина. Согласно методу область контакта упругого основания и балочного элемента условно разбивается на участки равной длины (участки Б. Н. Жемочкина). В середине каждого участка ставятся вертикальные жесткие связи, через которые осуществляется контакт балочного элемента с упругим основанием. Считается, что усилие в связи вызывает равномерно распределенные контактные напряжения по ширине (площади) участка. В центре пролета балочного элемента вводится защемление. Полученная статически неопределимая система решается смешанным методом строительной механики, где за основные неизвестные приняты усилия в связях Б. Н. Жемочкина и перемещения (углы поворота и вертикальное перемещение) во введенном в середине пролета балочного элемента защемлении.

Расчетная схема плоской контактной задачи свободного частичного опирания балочного элемента на упругие основания в виде упругих четвертьплоскостей представлена на рисунке 1.



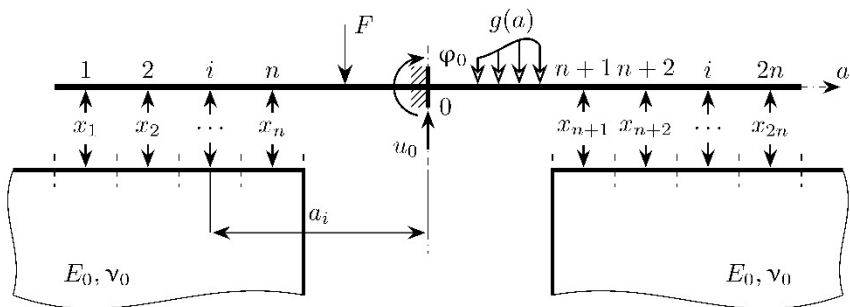


Рисунок 1 – Расчетная схема рассчитываемого балочного элемента

Для нахождения основных неизвестных смешанного метода строительной механики составляется система канонических уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \delta_{1,1}x_1 + \delta_{1,2}x_2 + \dots + \delta_{1,n}x_n + u_0 + \varphi_0 a_1 + \Delta_{1,F} = 0 \\
 \delta_{2,1}x_1 + \delta_{2,2}x_2 + \dots + \delta_{2,n}x_n + u_0 + \varphi_0 a_2 + \Delta_{2,F} = 0 \\
 \dots \\
 \delta_{n,1}x_1 + \delta_{n,2}x_2 + \dots + \delta_{n,n}x_n + u_0 + \varphi_0 a_n + \Delta_{n,F} = 0 \\
 \delta_{n+1,1}x_{n+1} + \delta_{n+1,2}x_{n+2} + \dots + \delta_{n+1,n}x_{2n} + u_0 - \varphi_0 a_{n+1} + \Delta_{n+1,F} = 0 \\
 \delta_{n+2,1}x_{n+1} + \delta_{n+2,2}x_{n+2} + \dots + \delta_{n+2,n}x_{2n} + u_0 - \varphi_0 a_{n+2} + \Delta_{n+2,F} = 0 \\
 \dots \\
 \delta_{2n,1}x_{n+1} + \delta_{2n,2}x_{n+2} + \dots + \delta_{2n,n}x_{2n} + u_0 - \varphi_0 a_{2n} + \Delta_{2n,F} = 0 \\
 -\sum_{i=1}^{2n} x_i + R_F = 0, \quad -\sum_{i=1}^n x_i a_i + \sum_{i=n+1}^{2n} x_i a_i + M_F = 0
 \end{array} \right. \quad (1)$$

где  $\delta_{i,j}$  – взаимное перемещение по направлению неизвестной  $x_i$  от действия единичной силы  $x_j = 1$  в основной системе смешанного метода;

$u_0, \varphi_0$  – неизвестные линейное и угловое перемещение в защемлении;

$n$  – число участков Б. Н. Жемочкина в одном узле;

$a_i$  – расстояние от точки установки  $i$ -ой связи Б. Н. Жемочкина до защемления;

$\Delta_{i,F}$  – взаимное перемещение по направлению неизвестной  $x_i$  от действия внешних нагрузок;

$R_F$  – реактивная сила в заделке, численно равная вертикальной равнодействующей всех внешних сил;

$M_F$  – реактивный момент в заделке, равный суммарному моменту всех внешних сил относительно точки, в которой введена заделка.

Расчетные схемы рассматриваемых пространственных контактных задач отличаются от расчетной схемы плоской контактной задачи (рисунок 1) только тем, что вводятся дополнительные связи Б. Н. Жемочкина в перпендикулярном продольной оси балки направлении. При этом, на схемах балка изображается ее продольной осью, а в местах контакта с основаниями балка заменяется срединными плоскостями, жесткость которых в поперечном направлении принимается бесконечной. В отличие от плоской задачи введенное в середине пролета балки условное защемление препятствует не только вертикальному  $u_0$  и угловому  $\varphi_0$  перемещению, но и угловому перемещению относительно продольной оси  $a$ . В данном случае, расчетные схемы имеют более высокую степень статической неопределенности, раскрытие которой также осуществляется смешанным методом строительной механики.

Разрешающая система уравнений имеет вид (1), но в нее добавляются один столбец, выражающий перемещения по направлению неизвестных усилий в связях Б. Н. Жемочкина от поворота балки относительно продольной оси, и одна строка – условие равновесия в виде равенства нулю моментов относительно продольной оси.

Коэффициенты  $\delta_{i,j}$  при неизвестных  $x_i$  в связях Б. Н. Жемочкина определяются выражением (2)

$$\delta_{i,j} = F_{i,j} + \lambda K_{i,j}, \quad (2)$$

где  $F_{i,j}$  – уменьшенное на жесткостной множитель вертикальное перемещение точки  $i$  поверхности основания от действия единичной силы  $F_j = 1$ , приложенной в точке  $j$ ;

$\lambda$  – показатель гибкости по Горбунову-Посадову, определяемый формулой (3);

$K_{i,j}$  – уменьшенное на жесткостной множитель вертикальное перемещение точки  $i$  балочного элемента от действия единичной силы  $F_j = 1$ , приложенной в точке  $j$  балочного элемента.

$$\lambda = \frac{\pi E_0 b \Delta l^3}{E_b I_b (1 - \nu_0^2)}, \quad (3)$$

где  $E_0$ ,  $\nu_0$  – модуль деформации и коэффициент Пуассона материала упругих оснований;

$E_b I_b$  – изгибная жесткость материала балочного элемента;

$\Delta l$  – глубина опирания балочного элемента;

$b$  – ширина балочного элемента.

Перемещения  $K_{i,j}$  в диссертации определяются известными методами строительной механики.

Перемещения  $F_{i,j}$  зависят от вида основания. При решении плоской контактной задачи упругие основания представляются в виде упругих четвертьплоскостей, и тогда в качестве  $F_{i,j}$  принимается формула для определения вертикальных перемещений грани четвертьплоскости, полученная на основании взятой из работ К. В. Дмитриевой формулы для определения окружных перемещений грани плоского клина. В случае пространственной контактной задачи, когда упругие основания представляются в виде четвертьпространств, то для  $F_{i,j}$  принимается функция влияния четвертьпространства, полученная в трудах С. В. Босакова.

Путем совместного применения решений для полупространства и четвертьпространства, нагружаемых вертикальной сосредоточенной силой, соискателем впервые получено аналитическое выражение (4) для определения вертикальных перемещений  $V(x, y)$  поверхности  $1/8$  упругого изотропного пространства со свободными гранями (рисунок 2) от действия сосредоточенной силы  $F$ .

$$V(x, y) = \frac{F(1 - \nu_0^2)}{\pi E_0} \left[ \frac{1}{R_1} + (1 + a_0) \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) + \frac{1 + 2a_0}{R_4} + a_0 f_1 + a_1 f_2 \right], \quad (4)$$

$$\text{где } R_1 = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2};$$

$$R_2 = \sqrt{(x - a)^2 + (y + b)^2};$$

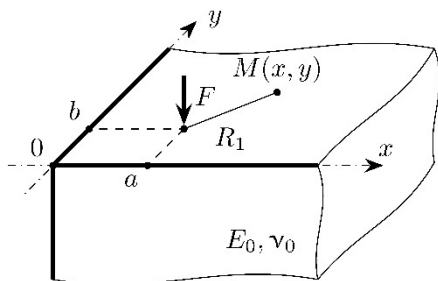
$$R_3 = \sqrt{(x + a)^2 + (y - b)^2};$$

$$R_4 = \sqrt{(x + a)^2 + (y + b)^2};$$

$$a_0 = \frac{4}{\pi^2 - 4}; \quad a_1 = 2, 1;$$

$$f_1 = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{R_1} \arctg \frac{R_1}{2\sqrt{ax}} + \frac{1}{R_2} \arctg \frac{R_2}{2\sqrt{ax}} + \frac{1}{R_1} \arctg \frac{R_1}{2\sqrt{by}} + \frac{1}{R_3} \arctg \frac{R_3}{2\sqrt{by}} \right);$$

$$f_2 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\sqrt{ax}}{R_1^2} - \frac{2ax}{R_1^3} \arctg \frac{R_1}{2\sqrt{ax}} + \frac{\sqrt{ax}}{R_2^2} - \frac{2ax}{R_2^3} \arctg \frac{R_2}{2\sqrt{ax}} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{by}}{R_1^2} - \frac{2by}{R_1^3} \arctg \frac{R_1}{2\sqrt{by}} + \frac{\sqrt{by}}{R_3^2} - \frac{2by}{R_3^3} \arctg \frac{R_3}{2\sqrt{by}} \right) + \left( \frac{ax}{R_3^3} + \frac{ax+by}{R_4^3} + \frac{by}{R_2^3} \right).$$



**Рисунок 2 – Действие сосредоточенной силы на 1/8 упругого изотропного пространства**

Полученное выражение (4) применяется для решения разнообразных контактных задач для 1/8 упругого изотропного пространства, в том числе и для вычисления  $F_{i,j}$  рассматриваемой в диссертации пространственной контактной задачи свободного опирания балочного элемента на основания в виде 1/8 упругого изотропного пространства.

Формулы для определения вертикальных перемещений опорных поверхностей упругих четвертьплоскостей, четвертьпространств и 1/8 пространства, обладают особенностями в точке приложения силы  $F$ . Чтобы определить перемещения указанной точки, сила равномерно распределяется по прямоугольному участку Б. Н. Жемочкина, а затем вычисляется несобственный интеграл по площади участка от соответствующего выражения. Процесс интегрирования и его результаты представлены соискателем в виде окончательных формул, применяемых для определения вертикальных перемещений точек приложения сосредоточенных сил.

Свободные члены  $\Delta_{i,F}$  системы уравнений (1) от действия внешних сосредоточенных сил и равномерно распределенных нагрузок определяются известными методами строительной механики.

Далее вычисляются неизвестные усилия  $x_i$  посредством решения системы (1).

Контакт между балочным элементом и упругими основаниями моделируется односторонними связями, работающими только на сжатие. Появление отрицательных усилий  $x_i$  в связях Б. Н. Жемочкина свидетельствует об

отрыве балочного элемента от опорных площадок, на которые она опирается. В такой постановке рассматриваемая задача относится к задачам с заранее неизвестной областью контакта или областью отрыва, которая может быть определена через организацию итерационного процесса их решения. Таким образом, поставленная контактная задача расчета свободного частичного опирания балочного элемента на упругое основание является конструктивно нелинейной.

Дополнительно соискателем даны рекомендации по учету местных деформаций в балочном элементе при решении контактной задачи, а также вычислению радиальных напряжений в упругой четвертьплоскости.

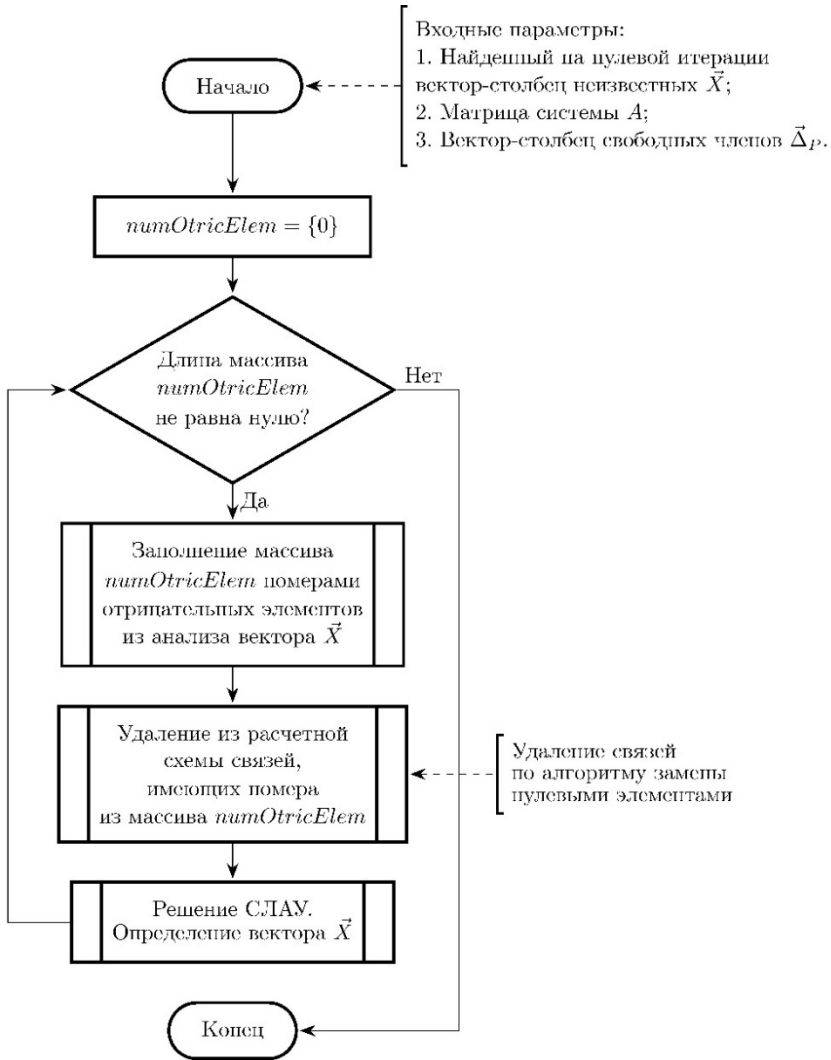
**Третья глава** содержит результаты численного решения контактной задачи свободного частичного опирания балочного элемента в виде балочной плиты на упругие четвертьплоскости, совместно работающие в условиях плоской деформации.

Загружение балочной плиты выполнялось равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q = 4,5$  кН/м<sup>2</sup> без учета собственного веса и  $q = 7,8$  кН/м<sup>2</sup> с учетом ее собственного веса, а также сосредоточенной силой, значение которой составляет  $F = 7$  кН, по семи различным схемам:

1. Действие в середине пролета одной сосредоточенной силы.
2. Действие равномерно распределенной нагрузки в пролете балочной плиты.
3. Действие двух сосредоточенных сил, приложенных в третях пролета балочной плиты.
4. Действие одной сосредоточенной силы, приложенной в трети пролета балочной плиты.
5. Совместное действие равномерно распределенной нагрузки и приложенной в середине пролета сосредоточенной силы.
6. Совместное действие равномерно распределенной нагрузки в пролете балочной плиты и нагрузки от собственного веса по всей ее длине.
7. Совместное действие равномерно распределенной нагрузки и приложенной в середине пролета сосредоточенной силы и нагрузки от собственного веса по всей длине балочной плиты.

Для учета конструктивной нелинейности был разработан итерационный алгоритм, который представлен блок-схемой (рисунок 3).

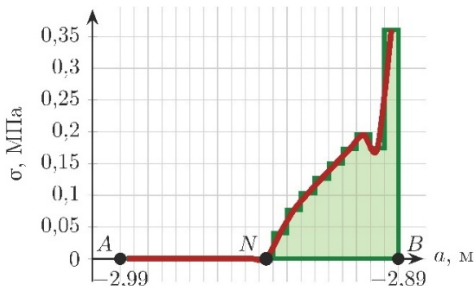
Расчеты показали, что при числе участков Б. Н. Жемочкина в одном узле  $n = 20$  область контакта свелась к двум ближайшим к вершине четвертьплоскости участкам. Подобные результаты получены при неограниченном увеличении числа  $n$ , и в предельном случае при  $n \rightarrow \infty$  изогнутая балочная плита соприкасается с основаниями в вершинах четвертьплоскостей.



**Рисунок 3 – Блок-схема итерационного алгоритма**

При загрузке балочной плиты двумя сосредоточенными силами, прикладываемыми в уровне вершин четвертьплоскостей, с учетом ее отрыва от поверхностей оснований контактная область имеет фактические размеры. При числе  $n = 20$  и опирании 100 мм длина фактического контакта составляет  $\Delta l_f = 47,5$  мм. Эпюра контактных напряжений на опорных площадках

левого и правого основания имеет криволинейный характер распределения, и напряжения концентрируются у вершин четвертьплоскостей. В силу симметрии нагружения и опирания балочной плиты на рисунке 4 продемонстрирована эпюра контактных напряжений на контактной площадке левого основания.



**Рисунок 4 – Эпюра контактных напряжений в левом основании**

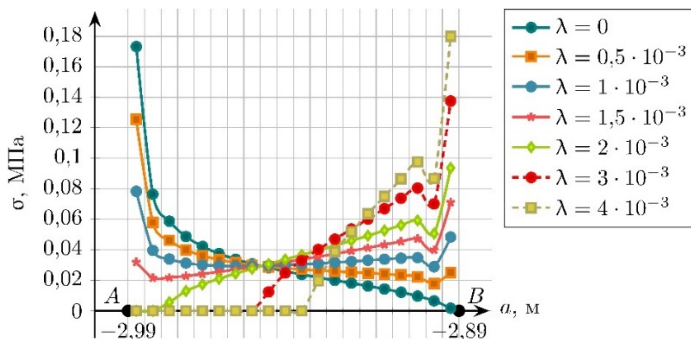
Доказывается, что при увеличении числа участков разбиения  $n$  длина контактной зоны приближается к постоянному значению, и в конечном счете, не зависит от  $n$ . Установлено, что при  $n = 20$  погрешность в определении размера контактной области не превосходит 5 %.

В результате решения контактной задачи свободного опирания балочной плиты на основания, материал которых имеет упругие характеристики каменной кладки, установлено, что фактическая контактная область больше, чем при опирании на основания, материал которых имеет упругие характеристики бетона, при прочих равных условиях.

В работе показано, что от соотношения жесткостей опираемых балочной плиты и четвертьплоскостей, характеризуемое показателем гибкости по Горбунову-Посадову (3), зависит окончательное решение контактной задачи (рисунок 5): при уменьшении показателя гибкости по Горбунову-Посадову увеличивается фактическая контактная область, и при достижении определенного значения длина фактической зоны опирания совпадет с первоначально заданной глубиной опирания балочной плиты  $\Delta l$ , т. е. не будет происходить отрыв ее от основания.

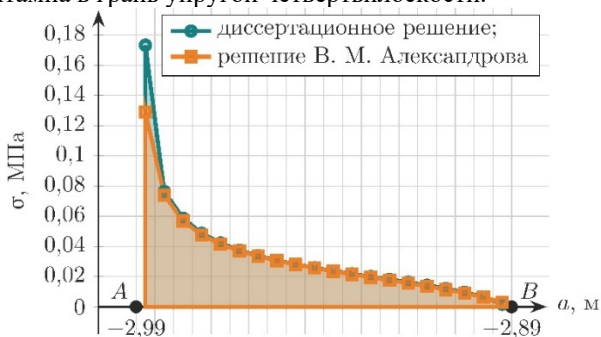
Установлено, что при наличии отрыва, эпюра контактных напряжений непрерывно убывает до нуля при приближении к границе области контакта. В противовес этому, когда нет отрыва, наблюдается концентрация напряжений на границе области контакта.

Значение показателя гибкости по Горбунову-Посадову  $\lambda = 0$  соответствует опиранию на упругие четвертьплоскости абсолютно жесткой балочной плиты. В данном случае контактные напряжения концентрируются у ее торца.



**Рисунок 5 – Зависимость контактных напряжений от показателя гибкости по Горбунову-Посадову**

На рисунке 6 выполнено сопоставление эпюр контактных напряжений при опирании на упругие четвертьплоскости абсолютно жесткой балочной плиты с теоретическим решением В. М. Александра задачи о внедрении жесткого штампа в грань упругой четвертьплоскости.



**Рисунок 6 – Совместная эпюра контактных напряжений в опорной зоне под абсолютно жесткой балочной плитой**

Эпюра контактных напряжений, полученная в диссертационном исследовании, практически повторяет эпюру теоретического решения В. М. Александра. Расхождение координаты точек приложения равнодействующих двух эпюр составляет 0,056 %.

В работе соискателем показано, что учет местных деформаций в балочной плите, рассматривая ее как упругую четвертьплоскость, увеличивает контактную область. Так при ее опирании на основания, имеющего упругие свойства бетона, загрузении ее сосредоточенными силами в уровне вершин четвертьплоскостей, и при числе участков Б. Н. Жемочкина в одном узле



$n = 20$  длина контактной области при учете местных деформаций увеличилась и ее значение составило  $\Delta l_f^M = 57,5$  мм (без учета местных деформаций  $\Delta l_f = 47,5$  мм).

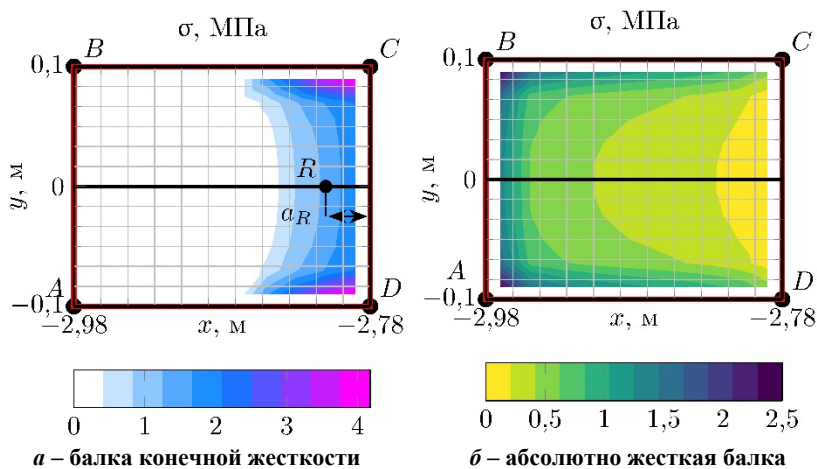
В **четвертой главе** выполнено численное решение пространственной контактной задачи по определению НДС свободного опирания балок различных жесткостей на четвертьпространства, материал которых имеет упругие свойства бетона и каменной кладки.

В качестве железобетонной балки принята стропильная балка БСП 6.1 по Серии 1.462.1-10/93 «Балки стропильные железобетонные для покрытий зданий с пролетами 6 и 9 м», металлической балки – балка 14Б2 нормального профиля по ГОСТ 26020-83 «Двутавры стальные горячекатаные с параллельными гранями полок» длиной 6 м. Деревянная балка принята прямоугольного сечения 125 x 150 мм длиной 4 м из древесины (ель/сосна) 1 сорта. Нагружение балок выполнено по тем же самым схемам, что и балочной плиты при решении плоской контактной задачи.

В работе показано, что при опирании всех принятых видов балок на четвертьпространства, имеющие упругие свойства бетона, а также металлической и деревянной балок на четвертьпространства, имеющие упругие свойства каменной кладки, и загрузении по упомянутым схемам нагружения независимо от количества  $n$  участков Б. Н. Жемочкина контактная область с учетом ее отрыва от граней четвертьпространств сводится к двум ближайшим к ребру четвертьпространства рядам, и при  $n \rightarrow \infty$  изогнутая балка опирается на ребра четвертьпространств.

В диссертации выполнено решение контактной задачи в случае опирания железобетонной балки на четвертьпространства, материал которых имеет упругие свойства каменной кладки. На рисунке 7, а показаны изолинии контактных напряжений, получаемых при действии приложенной в середине пролета балки сосредоточенной силы. В данном случае балка отрывается от опорных поверхностей, контактные напряжения образуют криволинейную поверхность, а максимальные их значения концентрируются у ребра  $CD$  четвертьпространства.

В таблице 1 приведены значения расчетных величин, полученные при нагружении балки рассматриваемыми в диссертации схемами нагрузки:  $\sigma_{\max}$  – максимальные напряжения в опорном узле, расстояние  $a_R$  от ребра четвертьпространства до равнодействующей в узле, расчетный пролет  $l_f$  балки, максимальный изгибающий момент  $M_{\max}$ , расчетный  $w_0$  и теоретический  $w_0^T$  прогибы середины балки и их расхождения  $\varepsilon_w$ .



**Рисунок 7 – Изолинии контактных напряжений при опирании балки на четвертьпространства и нагруженную в середине пролета сосредоточенной силой**

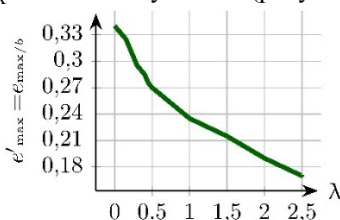
Таблица 1 – Результат расчета балки при ее опирании на четвертьпространства (упругие свойства каменной кладки)

Параметр	Схема нагружения						
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7
$\sigma_{\max}$ , МПа	4,177	9,671	7,739	$\frac{3,160}{4,524}$	4,920	10,403	14,641
$a_R$ , мм	29,85	40,70	32,88	$\frac{25,90}{38,09}$	31,86	40,86	37,47
$l_f$ , м	5,620	5,641	5,626	5,624	5,624	5,642	5,635
$M_{\max}$ , кНм	70,246	107,389	94,310	47,183	78,175	115,332	185,494
$w_0$ , мм	2,695	5,155	4,615	2,309	3,076	5,536	8,226
$w_0^T$ , мм	2,724	5,247	4,674	2,335	3,114	5,637	8,357
$\varepsilon_w$ , %	1,06	1,77	1,27	1,10	1,23	1,80	1,56

Как и при решении плоской контактной задачи, решение пространственных зависит от соотношения жесткостей опираемых конструкций, характеризующееся показателем гибкости по Горбунову-Посадавау  $\lambda$ . Предельное значение  $\lambda = 0$  соответствует опиранию на четвертьпространства абсолютно жесткой балки. Распределение контактных напряжений в данном случае представлено на рисунке 7, б при нагружении сосредоточенной силой в середине пролета.

Контактные напряжения в данном случае концентрируются по границе контактной области, в особенности у торца  $AB$  балки. При этом балка перемещается вертикально поступательно, и данное перемещение вызвано только деформациями четвертьпространств.

В работе соискателем проведено исследование о влиянии эксцентриситета приложения нагрузки на решение контактной задачи. Установлено, что при достижении некоторого значения (допустимого эксцентриситета  $e_{\max}$ ) возникает опасность потери устойчивости положения равновесия балки и ее опрокидывания. Построен график зависимости величины относительного допустимого эксцентриситета  $e'_{\max} = e_{\max} / b$ , где  $b$  – ширина балки, от показателя гибкости по Горбунову-Посадову  $\lambda$ . Максимальное значение  $e'_{\max}$  соответствует  $\lambda = 0$ , и с дальнейшим ростом показателя гибкости по Горбунову-Посадову  $e'_{\max}$  монотонно убывает (рисунок 8).



**Рисунок 8 – Зависимость относительного допустимого эксцентриситета приложения нагрузки от показателя гибкости по Горбунову-Посадову**

При действии на балку нагрузки с эксцентриситетом в поперечном направлении контактные напряжения в опорных узлах имеют криволинейный и несимметричный относительно продольной оси характер распределения. Однако, доказано, что равнодействующие контактных напряжений (опорные реакции) и нагрузка лежат в одной вертикальной плоскости, параллельной продольной оси балки. В этом случае балка поворачивается относительно продольной оси на некоторый угол, и при этом в балке не возникают крутящие моменты, так как в опорных узлах нет устройств, их воспринимающих.

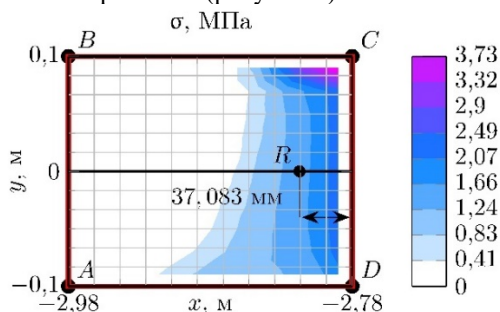
Обнаружено и показано на примере изолиний контактных напряжений в опорных узлах балки при опирании ее на четвертьпространства из разных материалов, что значения опорных реакций зависят не только от геометрии прикладываемых нагрузок, но и от свойств и упругих характеристик опорных конструкций.

Выполнено сопоставление результатов диссертационного решения контактной задачи свободного опирания железобетонной балки на четвертьпространства с упругими свойствами каменной кладки с решением методом конечных элементов в программном комплексе Ansys Workbench.

Балка загружалась в обоих случаях в середине пролета сосредоточенной силой. Получено, что распределение контактных напряжений по области контакта имеет качественно одинаковый вид. Максимальное расхождение в прогибах, посчитанных для середины балки, не превосходит 15 %.

**Пятая глава** посвящена результатам решения пространственной контактной задачи свободного опирания балок на упругие основания, моделируемые в одном случае слева и справа упругими  $1/8$  пространства, в другом – с одной стороны основание представляется четвертьпространством, с другой –  $1/8$  пространства. При этом вводится дополнительное допущение об отсутствии горизонтального перемещения балки в направлении поперечной оси.

Симметричное опирание балки, загруженной в середине пролета сосредоточенной силой, на края стен в виде  $1/8$  пространства вызывает несимметричное относительно продольной оси балки распределение по контактной области контактных напряжений (рисунок 9).



**Рисунок 9 – Изолинии контактных напряжений в левом узле при опирании балки на края оснований с упругими свойствами каменной кладки**

При этом максимальные напряжения концентрируются у вершины  $C$  контактной области. Данная вершина принадлежит ребру  $CD$   $1/8$  пространства и не совпадает с вершиной самого  $1/8$  пространства (точка  $D$ ).

Однако, несмотря на асимметрию распределения контактных напряжений, их равнодействующая  $R$  вместе с внешней нагрузкой принадлежат вертикальной плоскости симметрии балки, проходящей через ее продольную ось. Вследствие этого по длине балки не возникают крутящие моменты, однако балка поворачивается относительно своей продольной оси.

Рассматривая различные схемы нагружения балки при числе участков Б. Н. Жемочкина в одном узле  $n = 100$  и показателе гибкости по Горбунову-Посадову  $\lambda = 0,17778$  получены величины максимального контактного напряжения  $\sigma_{\max}$ , расстояния от равнодействующей до края  $1/8$  пространства  $a_R$ , расчетного пролета  $l_f$ , максимального изгибающего момента

$M_{\max}$ , найденного  $w_0$  и теоретического  $w_0^T$  прогибов середины балки, расхождения  $\varepsilon_w$  вычисленных прогибов и угла поворота балки  $\varphi_X$  относительно продольной оси (таблица 2).

Сравнение результатов, представленных в таблице 2 с аналогичными результатами для четвертьпространства (таблица 1) показало, что максимальные контактные напряжения для 1/8 пространства  $\sigma_{\max}$  для всех схем нагружения имеют меньшие значения. Этот факт говорит о том, что при одинаковых опорных реакциях контактные напряжения распределяются по области больших размеров. Доказательством служат рассчитанные величины  $a_R$  и  $l_f$ , значения которых превышают значения аналогичных величин при опирании балки на четвертьпространство. Увеличение расчетного пролета  $a_f$  ведет и к увеличению величин  $M_{\max}$  и  $w_0$ .

Таблица 2 – Результат расчета железобетонной балки при ее опирании на края 1/8 пространства

Параметр	Схема нагружения						
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7
$\sigma_{\max}$ , МПа	3,732	8,711	6,952	$\frac{2,549}{4,214}$	4,412	9,370	13,137
$a_R$ , мм	37,08	52,49	41,11	$\frac{33,21}{48,02}$	39,67	52,73	48,04
$l_f$ , м	5,634	5,665	5,642	5,641	5,639	5,665	5,656
$M_{\max}$ , кНм	70,427	108,274	94,722	47,409	78,417	116,294	186,615
$w_0$ , мм	2,706	5,205	4,638	2,322	3,090	5,591	8,291
$w_0^T$ , мм	2,745	5,336	4,720	2,358	3,141	5,733	8,472
$\varepsilon_w$ , %	1,44	2,44	1,72	1,55	1,64	2,47	2,15
$\varphi_X$ , град	2'4,0"	5'2,7"	3'52,8"	1'59,9"	2'27,4"	5'25,9"	7'33,0"

Доказано, что при удалении продольной оси балки от края 1/8 пространства на расстояние, не меньше двух ширин балки, напряженно-деформированное состояние (НДС) 1/8 пространства аналогично НДС четвертьпространства и при решении контактной задачи 1/8 пространства можно рассматривать как четвертьпространство.

Выполнен расчет контактной задачи при различных значениях показателя гибкости по Горбунову-Посадову  $\lambda$  с построением изолиний контактных напряжений для некоторых  $\lambda$ . Во всех решениях контактные напряжения распределены асимметрично относительно продольной оси балки, од-

нако равнодействующие  $R$  (как это было установлено при реальном  $\lambda$ ) вместе с внешней нагрузкой принадлежат вертикальной плоскости симметрии балки, проходящей через ее продольную ось.

Показателю гибкости по Горбунову-Посадову  $\lambda = 0$  соответствует опирание на упругие основания абсолютно жесткой балки. В данном случае, балка, опираясь на 1/8 пространства, не только перемещается вертикально (как это было в случае опирания на основания в виде четвертьпространств), но и поворачивается на некоторый угол относительно своей продольной оси. Поскольку в данном случае не происходит отрыва балки от поверхности основания, то поверхность вертикальных перемещений верхней грани основания есть наклонная плоскость в границах контакта опорной площадки.

Далее в диссертации рассмотрена и решена пространственная контактная задача опирания железобетонной балки слева на край 1/8 пространства, а справа на основание, представленное четвертьпространством. Балка загружена в середине пролета сосредоточенной силой, основания имеют упругие характеристики каменной кладки. При числе участков Б. Н. Жемочкина в одном узле  $n=100$  и показателе гибкости по Горбунову-Посадову  $\lambda = 0,1778$ , получены распределение контактных напряжений в опорных областях балки (рисунок 10), значения равнодействующих контактных напряжений на левой  $Rl$  и правой  $Rr$  опоре, координаты точек их приложения, крутящего момента  $M_x$ , углов поворота  $\varphi_y$  и  $\varphi_x$  поперечного сечения середины балки (таблица 3).

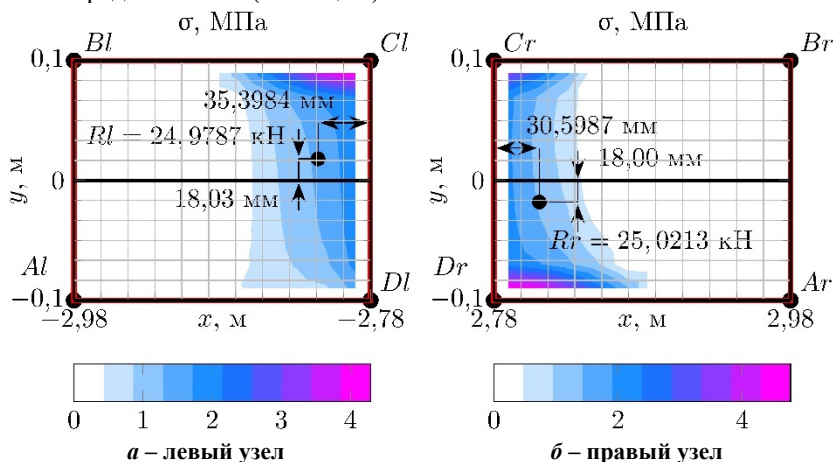


Рисунок 10 – Изолинии контактных напряжений в опорных узлах балки

Таблица 3 – Значения расчетных параметров при опирании балки на четвертьпространство и 1/8 пространства

$\lambda$	Параметр				
	$R$ , кН	$\{x_R; y_R\}$ , мм	$M_X$ , кНм	$\varphi_X$ , град	$\varphi_Y$ , град
0,17778	24,9787 25,0213	$\{-2815,14; 18,03\}$ $\{2810,6; -18,00\}$	0,45	57''	4,2''
0	24,9604 25,0396	$\{-2917,4; 20,70\}$ $\{2908,2; -20,64\}$	0,52	29,7''	2,96''

*Примечание.* В числителе указаны значения для левой опоры, в знаменателе – для правой.

Из представленных рисунков 10, а и 10, б видно, что контактные напряжения на левой и правой опорных площадках несимметричны. При этом напряжения на левой опоре, где основание представлено 1/8 пространства, концентрируются у вершины  $Cl$  контактной области, а напряжения на правой опоре, где основание в виде четвертьпространства – у вершин  $Cr$  и  $Dr$  контактной области. Равнодействующие контактных напряжений  $Rl$  и  $Rr$  расположены по разные стороны от продольной оси балки. Это вызывает появление по длине балки постоянного крутящего момента  $M_X$ , значением которого при проектировании балок пренебрегать нельзя. К тому же из таблицы 3 видно, что значения равнодействующих в левом и правом узлах не равных между собой ( $Rl = 24,9787$  кН  $\neq$   $Rr = 25,0213$  кН), равно как и абсциссы точек их приложения. Также балка поворачивается относительно продольной оси на угол  $\varphi_X$ , а поперечное сечение середины балки – на угол  $\varphi_Y$ .

Факт возникновения постоянного по длине балки крутящего момента, разных значений величин равнодействующих контактных напряжений на опорных площадках балки и несимметричность точек их приложения при геометрически симметричном и свободном опирании балки на различные основания установлен впервые.

В таблице 3 представлены результаты решения данной контактной задачи при показателе гибкости по Горбунову-Посадову  $\lambda = 0$  (опирание абсолютно жесткой балки). В данном случае, балка не отрывается от опорных поверхностей, перемещается не только в вертикальной плоскости, но и поворачивается относительно осей  $X$  и  $Y$  за счет неравномерных деформаций упругих оснований. Поверхности вертикальных перемещений граней упругих оснований в пределах областей контакта являются наклонными плоскостями.

В диссертации показано, что при удалении продольной оси балки от края упругого основания в виде 1/8 пространства на расстояние не менее двух

ширин балки доли крутящего момента и угла поворота относительно продольной оси не превосходят 7 % от своих первоначальных значений – и 1/8 пространства следует рассматривать как четвертьпространство.

Установлено, что существует такое положение прикладываемой с эксцентриситетом вертикальной силы, при котором балка не поворачивается относительно своей продольной оси. Данная величина получила название эксцентриситета вертикальной силы нулевого крена балки и обозначается  $e_y$ . Опирая балку на упругие основания, образующих систему «1/8 пространства – 1/8 пространства»,  $e_y \approx 0,16b$  ( $b$  – ширина балки), а на упругие основания в виде «1/8 пространства – четвертьпространство» –  $e_y \approx 0,08b$ .

Сопоставление диссертационного решения контактных задач данной главы произведено с результатами расчета рассматриваемых задач методом конечных элементов в программном комплексе Ansys Workbench. Распределение контактных напряжений в опорных узлах качественно согласуются друг с другом, а расхождения в прогибах середины пролета балки не превосходят 5 %.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

### Основные научные результаты диссертации

1. Впервые получено аналитическое выражение для определения вертикальных перемещений точек поверхности упругой изотропной 1/8 пространства. Выражение содержит элементарные функции и может быть использовано для решения разнообразных контактных задач для 1/8 пространства [4].
2. Решены плоская и пространственная контактные задачи свободного опирания балочных элементов на упругие четвертьплоскость, четвертьпространство и 1/8 пространства. Установлено, что поверхности контактных напряжений имеют криволинейный характер распределения по области контакта. При отрыве балочного элемента от опорных площадок контактные напряжения концентрируются у границы упругого основания, а при отсутствии отрыва – у торца опираемой конструкции [1–3; 5; 6; 8–17; 19; 20].
3. Разработан итерационный алгоритм для определения фактической области контакта с учетом отрыва балочного элемента от опорных площадок [1].
4. Установлено, что распределение контактных напряжений, а также величина расчетного пролета, рассматривая его как расстояние между равнодействующими контактных напряжений на левой и правой опорах, зависят



от изгибной жесткости балки, упругих свойств материала опорных поверхностей. Эти величины комплексно учитываются показателем гибкости по Горбунову- Посадову [1; 2; 5; 6].

5. Впервые доказано появление постоянного по длине балки крутящего момента при ее свободном опирании на упругие четвертьпространство и  $1/8$  пространства. Также установлено, что при удалении балки от границы упругой  $1/8$  пространства на расстояние порядка двух ширин балки ее можно рассматривать как четвертьпространство [6; 7; 21].

6. Обнаружено и доказано, что значения опорных реакций балочных элементов зависят не только от геометрии прикладываемых нагрузок, но и от вида, свойств и механических характеристик упругих оснований [7; 21].

#### **Рекомендации по практическому использованию результатов**

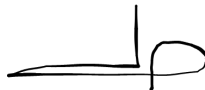
1. Разработанную методику по определению напряженно-деформированного состояния на контактных площадках в местах свободного частичного опирания балочных элементов на упругое основание с учетом их конструктивной нелинейности рекомендуется использовать при расчете и проектировании свободно опираемых балок и плит на несущие строительные конструкции (опоры мостов, массивы, толстые стены и др.).

2. Полученное в элементарных функциях выражение для определения вертикальных перемещений верхней грани упругой изотропной  $1/8$  пространства от действия вертикальной сосредоточенной силы рекомендуется использовать в качестве функции влияния при решении контактных задач или расчете конструкций, опираемых на упругую  $1/8$  пространства, а также при определении напряженно-деформированного состояния самой упругой  $1/8$  пространства со свободными гранями.

3. Результаты решения задачи при одновременном свободном опирании балки на  $1/8$  пространства и четвертьпространство рекомендуется учитывать при проектировании балок, выполняя их расчет не только на изгиб, но и кручение.

Полученные результаты использованы в учебном процессе для студентов строительных специальностей в курсе «Сопротивление материалов». Отдельные результаты приняты к внедрению в ОАО «Минскметрострой».

Внедрение в учебный процесс и производство подтверждено соответствующими актами.



## СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

### **Статьи в научных изданиях из списка рецензируемых ВАК Республики Беларусь**

1. Босаков, С. В. Решение контактной задачи для узла опирания балочной шарнирно опертой плиты / С. В. Босаков, П. Д. Скачѣк // Наука и техника. – 2019. – Т. 18, № 4. – С. 274–283.

2. Босаков, С. В. Решение пространственной контактной задачи для шарнирного узла опирания однопролетной балки / С. В. Босаков, П. Д. Скачѣк // Строительная механика и расчет сооружений. – 2019. – № 4. – С. 10–19.

3. Скачѣк, П. Д. Определение допустимых эксцентриситетов вертикальной нагрузки на шарнирно опираемую балку / П. Д. Скачѣк // Механика. Исследования и инновации : междунар. сб. науч. трудов. Вып. 12 / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белор. гос. ун-т транспорта ; под ред. А. О. Шимановского. – Гомель, 2019. – С. 182–190.

4. Босаков, С. В. Действие сосредоточенной силы на 1/8 однородного изотропного пространства / С. В. Босаков, П. Д. Скачѣк // Наука и техника. – 2020. – Т. 19, № 5. – С. 372–376.

5. Босаков, С. В. Определение контактных напряжений при шарнирном опирании балки на край стены / С. В. Босаков, П. Д. Скачѣк // Строительная механика и расчет сооружений. – 2020. – № 6. – С. 33–40.

6. Босаков, С. В. Решение пространственной контактной задачи шарнирных узлов опирания балки на упругие четвертьпространство и одну восьмую пространства / С. В. Босаков, П. Д. Скачѣк // Проблемы современного бетона и железобетона : сб. науч. трудов. Вып. 12 / М-во архитектуры и стр-ва Респ. Беларусь, РУП «Институт БелНИИС». – Минск : Колорград, 2020. – С. 28–44.

7. Скачѣк, П. Д. Особенности нелинейного расчета изгибаемых стержней, частично опертых на упругое основание / П. Д. Скачѣк // Наука и техника. – 2023. – Т. 22, № 2. – С. 141–149.

### **Статьи в сборниках научных трудов и материалов конференций**

8. Скачѣк, П. Д. Использование пакета «Mathematica» в решении контактной задачи шарнирного узла опирания балочной плиты / П. Д. Скачѣк // Теория и практика исследований и проектирования в строительстве с применением систем автоматизированного проектирования (САПР) : сборник статей III междунар. научно-технической конф., Брест, 28–29 марта 2019 г. / БрГТУ ; редкол. : Н. Н. Шалобыта [и др.]. – Брест, 2019. – С. 87–93.

9. Скачѣк, П. Д. Контактные напряжения в шарнирном узле опирания балки / П. Д. Скачѣк // Новые материалы, оборудование и технологии в промышленности : материалы междунар. научно-технической конференции

мол. ученых, Могилев, 24–25 октября 2019 г. / Белорусско-российский ун-т ; ред- кол. : М. Е. Лустенков (гл. ред.) [и др.]. – Могилев, 2019. – С. 142.

10. Скачѣк, П. Д. Напряженное состояние шарнирного узла опирания балочной плиты при различном показателе гибкости / П. Д. Скачѣк // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии : материалы междунар. научно-технической конференции, Могилев, 25–26 апреля 2019 г. / Белорусско- российский ун-т ; редкол. : М. Е. Лустенков (гл. ред.) [и др.]. – Могилев, 2019. – С. 300–301.

11. Скачѣк, П. Д. Распределение контактных напряжений в месте опирания балочной шарнирно-опертой плиты на стену / П. Д. Скачѣк // Актуальные проблемы геотехники, экологии, защиты населения в чрезвычайных ситуациях и строительной механики [Электронный ресурс] : материалы 75-й студенческой научно-технической конференции : секция «Геотехника и строительная механика», 13 мая 2019 г. / сост. : Т. В. Тронда, С. А. Нудный. – Минск : БНТУ, 2019. – С. 98–103.

12. Скачѣк, П. Д. Расчет реактивных давлений и фактической зоны контакта в шарнирном узле балки, опираемой на стены / П. Д. Скачѣк // Проблемы безопасности на транспорте : материалы IX Междунар. научн.-практ. конф., Гомель, 28–29 ноября 2019 г : в 2 ч. Ч. 2 / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Бел. ж. д., Белорус. гос. ун-т трансп. ; под общ. ред. Ю. И. Кулаженко. – Гомель : БелГУТ, 2019. – С. 255–256.

13. Скачѣк, П. Д. Напряженное состояние узла опирания свободно опертой балки / П. Д. Скачѣк, С. В. Босаков // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXV междунар. симпозиума им. А. Г. Горшкова, Вятчи, 18–22 марта 2019 г : в 2 т. Т. 2 / Московский авиационный институт. – М. : ООО «ТРП», 2019. – С. 127–129.

14. Скачѣк, П. Д. Пространственная контактная задача опирания балки на четвертьпространство / П. Д. Скачѣк, С. В. Босаков // Новые горизонты – 2019 : сб. материалов Белорусско-Китайского молод. иннов. форума, Минск, 12–13 ноября 2019 г. / М-во образования Респ. Беларусь, БНТУ, Ин-т конфуция по науке и технике БНТУ, Научно-технол. парк БНТУ «Политехник». – Минск : БНТУ, 2019. – С. 181–183.

15. Скачѣк, П. Д. Анализ шарнирного опирания балки на четвертьпространство и одну восьмую пространства / П. Д. Скачѣк // Проблемы безопасности на транспорте : материалы X Междунар. научн.-практ. конф., Гомель, 26–27 ноябр. 2020 г : в 5 ч. Ч. 1 / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Бел. ж. д., Белорус. гос. ун-т трансп. ; под общ. ред. Ю. И. Кулаженко. – Гомель : БелГУТ, 2020. – С. 125–126.

16. Скачѣк, П. Д. Решение пространственной контактной задачи при шарнирном опирании балки на четвертьпространство / П. Д. Скачѣк // Теория и практика исследований, проектирования и САПР в строительстве : сборник статей IV междунар. научно-технической конф., Брест, 27 марта 2020 г. / БрГТУ ; редкол. : Н. Н. Шалобыта [и др.]. – Брест, 2020. – С. 165–173.

17. Скачѣк, П. Д. Влияние несимметричного опирания шарнирной балки на ее напряженно-деформированное состояние / П. Д. Скачѣк, С. В. Босаков // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXVI междунар. симпозиума им. А.Г. Горшкова, Вятичи, 16–20 марта 2020 г. : в 2 т. Т. 1 / Московский авиационный институт. – М. : ООО «ТРП», 2020. – С. 64–66.

18. Скачѣк, П. Д. Расчет узлов опирания шарнирно-опертых балок и плит / П. Д. Скачѣк // Проблемы безопасности на транспорте : материалы XI Междунар. научн.-практ. конф., Гомель, 25–26 ноябр. 2021 г. : в 2 ч. Ч. 2 / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Бел. ж. д., Белорус. гос. ун-т трансп. ; под общ. ред. Ю. И. Кулаженко. – Гомель : БелГУТ, 2021. – С. 187–188.

19. Скачѣк, П. Д. Решение плоской и пространственной контактных задач при шарнирном опирании изгибаемых конструкций на стены / П. Д. Скачѣк, С. В. Босаков // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXVII междунар. симпозиума им. А.Г. Горшкова, Вятичи, 17–21 мая 2021 г. : в 2 т. Т. 2 / Московский авиационный институт. – М. : ООО «ТРП», 2021. – С. 22–24.

#### **Тезисы докладов**

20. Босаков, С. В. Контактное взаимодействие шарнирно опираемой балки и стены / С. В. Босаков, П. Д. Скачѣк // Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій : тези другої міжнародної науково-технічної конференції пам. ак. У І. Моссаковського, Дніпро, 10–12 жовтня 2019 р. / М-во освіти і науки України, Дніпровський національний університет ім. Олеся Гончара; редкол. : М. В. Поляков (гол. ред.) [та інші]. – Дніпро, 2019. – С. 59–60.

21. Скачѣк, П. Д. Особенности решения нелинейных контактных задач о частичном опирании балочных элементов на упругое основание / П. Д. Скачѣк // Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений : тезисы докладов VIII-го международного симпозиума, Тамбов, 17–21 мая 2023 г. / ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»; редкол. : В. Н. Сидоров, П. В. Монастырев (отв. ред.) [и др.]. – Тамбов, 2023. – С. 174–176.

## РЭЗІЮМЭ

Скачок Павел Дзмітрыевіч

### **Напружана-дэфармаваны стан на кантактных пляцоуках бэлечных элементаў, якія часткова абапіраюцца на пругкае аснаванне**

**Ключавыя словы:** кантактная задача, кантактныя напружанні, кантактная вобласць, бэлечны элемент, пругкае аснаванне, пругкая чвэрцьпрастору, пругкая чвэрцьплоскасць, пругкая  $1/8$  прасторы, паказчык гнуткасці па Гарбунову-Пасадаву, метады Б. М. Жемачка, змешаны метады

**Мэта даследавання:** вызначэнне напружана-дэфармаванага стану на кантактных пляцоўках у месцах свабоднага частковага абапірання бэлечных элементаў на пругкае аснаванне.

**Метады даследавання:** абстрагаванне, ідэалізацыя, матэматычнае мадэляванне, метады будаўнічай механікі, метады Б. Н. Жэмачка, метады канчатковых элементаў.

#### **Атрыманыя вынікі іх навізна:**

1. Упершыню атрыман аналітычны выраз для вызначэння вертыкальных перасоўванняў кропак паверхні пругкай ізатропнай  $1/8$  прасторы. Выраз змяшчае элементарныя функцыі і валодае універсальнасцю, бо можа быць скарыстаны для рашэння разнастайных кантактных задач для  $1/8$  прасторы.

2. Вырашаны новыя кантактныя задачы частковага абапірання бэлечных элементаў на пругкія чвэрцьплоскасць, чвэрцьпрастору і  $1/8$  прасторы з улікам канструктыўнай нелінейнасці і фізічных уласцівасцяў апорных паверхняў кантактных пляцовак.

3. Распрацаваны ітэрацыйны алгарытм пры рашэнні новых кантактных задач частковага абапірання бэлечных элементаў на пругкую падставу для вызначэння вобласці кантакту з улікам адрыву бэлечнага элемента ад апорных паверхняў кантактных пляцовак.

4. Упершыню атрымана і даказана з'яўленне крутоўнага моманту, сталага па даўжыні выгінальнага бэлечнага элемента (бэлькі) пры яго свабодным адначасовым абапіранні на пругкія чвэрцьпрастору і  $1/8$  прасторы ці пры несіметрычным абапіранні на дзве  $1/8$  прасторы.

**Рэкамендацыі па выкарыстанні і вобласць ужывання:** вынікі працы могуць быць скарыстаны ў навукова-даследчых і праектных арганізацыях пры разліку свабодна абапіральных бэлек і пліт на апорныя будаўнічыя канструкцыі.

## РЕЗЮМЕ

Скачѣк Павел Дмитриевич

### **Напряженно-деформированное состояние на контактных площадках балочных элементов, частично опираемых на упругое основание**

**Ключевые слова:** контактная задача, контактные напряжения, контактная область, балочный элемент, упругое основание, упругое четвертьпространство, упругая четвертьплоскость, упругая  $1/8$  пространства, показатель гибкости по Горбунову-Посадову, метод Б. Н. Жемочкина, смешанный метод

**Цель исследования:** определение напряженно-деформированного состояния на контактных площадках в местах свободного частичного опирания балочных элементов на упругое основание.

**Методы исследования:** абстрагирование, идеализация, математическое моделирование, методы строительной механики, метод Б. Н. Жемочкина, метод конечных элементов.

#### **Полученные результаты и их новизна:**

1. Впервые получено аналитическое выражение для определения вертикальных перемещений точек поверхности упругой изотропной  $1/8$  пространства. Выражение содержит элементарные функции и обладает универсальностью, т. к. может быть использовано для решения разнообразных контактных задач для  $1/8$  пространства.

2. Решены новые контактные задачи частичного опирания балочных элементов на упругие четвертьплоскость, четвертьпространство и  $1/8$  пространства с учетом конструктивной нелинейности и физических свойств опорных поверхностей контактных площадок.

3. Разработан итерационный алгоритм при решении новых контактных задач частичного опирания балочных элементов на упругое основание для определения области контакта с учетом отрыва балочного элемента от опорных поверхностей контактных площадок.

4. Впервые получено и доказано появление крутящего момента, постоянного по длине изгибаемого балочного элемента (балки) при его свободном одновременном опирании на упругие четвертьпространство и  $1/8$  пространства или при несимметричном опирании на две  $1/8$  пространства.

**Рекомендации по использованию и область применения:** результаты работы могут быть использованы в научно-исследовательских и проектных организациях при расчете свободно опираемых балок и плит на несущие строительные конструкции.

## SUMMARY

Pavel Skachok

### **Stress-strain state on the contact pads of beam elements partially supported by an elastic foundation**

**Keywords:** contact problem, contact stresses, contact region, beam element, elastic foundation, elastic quarter-space, elastic quarter-plane, elastic  $1/8$  space, flexibility index according to Gorbunov-Posadov, B. N. Zhemochkin's method, hybrid method

**Aim:** determination of the stress-strain state on contact areas in places of free partial support of beam elements on an elastic base.

**Research methods:** abstraction, idealization, mathematical modeling, methods of structural mechanics, B. N. Zhemochkin's method, finite element method.

#### **The results obtained and their novelty:**

1. For the first time, an analytical expression was obtained for determining the vertical displacements of points on the surface of an elastic isotropic  $1/8$  space. The expression contains elementary functions and is universal, since it can be used to solve a variety of contact problems for  $1/8$  space.

2. New contact problems of partial support of beam elements on elastic quarter-plane, quarter-space and  $1/8$  space have been solved, taking into account the structural nonlinearity and physical properties of the supporting surfaces of the contact pads.

3. An iterative algorithm has been developed for solving new contact problems of partial support of beam elements on an elastic base to determine the contact area, taking into account the separation of the beam element from the supporting surfaces of the contact pads.

4. For the first time, the appearance of a torque constant along the length of a bent beam element (beam) was obtained and proven when it is freely supported simultaneously on elastic quarter-space and  $1/8$  space or when asymmetrically supported on two  $1/8$  spaces.

**Recommendations for use and scope:** the results of the work can be used in research and design organizations when calculating freely supported beams and slabs on load-bearing building structures.

Научное издание

**СКАЧЁК**  
**Павел Дмитриевич**

**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ  
НА КОНТАКТНЫХ ПЛОЩАДКАХ БАЛОЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ,  
ЧАСТИЧНО ОПИРАЕМЫХ НА УПРУГОЕ ОСНОВАНИЕ**

Автореферат диссертации  
на соискание ученой степени кандидата технических наук  
по специальности 05.23.17 – строительная механика

Подписано в печать 24.11.2023. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Цифровая печать.  
Усл. печ. л. 1,74. Уч.-изд. л. 1,58. Тираж 60. Заказ 985.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя  
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.