11 КЛАСС
МОДУЛЬ «ПРЕДМЕТНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ ЛАБОРАТОРИЯ»

МАТЕМАТИКА

Практическая работа. ***«Задачи с экономическим содержанием. Элементы финансовой математики (вклады и кредиты, начисление процентов, расчет сроков. Решение задач линейного программирования (максимальная прибыль, минимальные издержки»***.

Цель занятия: углубить и систематизировать знания обучающихся о математических моделях в экономике; сформировать умение переводить сформулированные в виде текста условия в уравнения и неравенства; анализировать полученные результаты; развивать познавательную и творческую активность, инициативность, ответственность за свои действия, организованность, предприимчивость, стремление к саморазвитию и самореализации, а также навыки осуществления коммуникации, умения работы с информацией.

Основные вопросы для рассмотрения на учебном занятии.

1. **Основные формулы для решения задач**:

1) 1% - это 0,01

2) Основные соотношения и выражениями, встречающиеся при решении задач на проценты:

• Число a составляет p% от числа b: $a = \frac{b}{100} \cdot p = 0{,}01bp$

• Число a увеличили на p%: $a \cdot (1+0{,}01p)$

• Число a увеличили сначала на p%, а потом еще на q%:

$$a \cdot (1+0{,}01p) \cdot (1+0{,}01q)$$

• Число a уменьшили на p%: $a \cdot (1 - 0{,}01p)$

3) Задачи, связанные с изменением цены. Пусть So – первоначальная цена, S – новая (окончательная) цена.

• Повышение цены на a%

$$S= So \cdot (1+0{,}01a)$$

n раз на a%

$$S= So \cdot (1+0{,}01a)^n$$

• Понижение цены на a%

$$S= So \cdot (1-0{,}01a)$$

n раз на a%

$$S= So \cdot (1-0{,}01a)^n$$

2. **Кредиты**. Кредит — денежная сумма, которую банк даёт на определённый срок и на определённых условиях. Другими словами, это долг перед банком. При этом кредит состоит:

- из основного долга, то есть суммы, которую мы берём в долг;
- процентной части, начисляемой на основную сумму.

Кредиты обычно берут для покупки как бытовых вещей, так и чего-то более внушительного, например машины или квартиры. В обоих случаях человек сталкивается с обязательными платежами, которые различаются лишь схемой выплат. Их всего две: аннуитетная и дифференцированная.

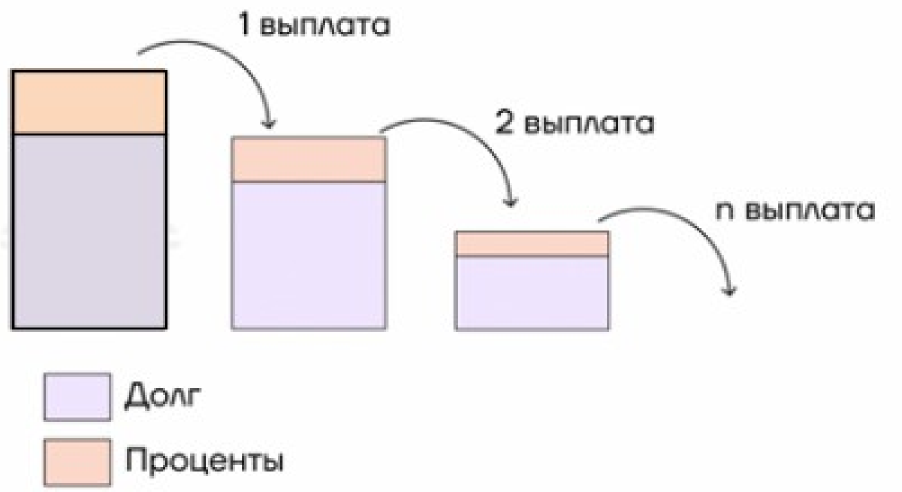
Аннуитетные платежи — такая система выплат, при которой кредит выплачивается раз в год (или в другой период времени, в зависимости от договора) равными платежами.

Вне зависимости от остатка долга, платёж меняться не будет. Например, если мы заключим договор с банком, в котором пропишут, что каждый месяц необходимо выплачивать 10 тысяч рублей, — это и будет пример аннуитетных платежей.

Разберёмся чуть подробнее. Каждый расчётный период (месяц, год) на кредит начисляются установленные проценты. Следовательно, выплачивая кредит по аннуитетным платежам, мы одновременно гасим и часть кредита, и процент.

Чем больше долг, тем больше начисленный на него процент. Поскольку сама выплата не меняется с течением времени, то основная часть выплаты идёт сначала на погашение начисленных процентов и только потом — на погашение самого долга. Со временем их отношение выравнивается и меняется в обратную сторону.

Схему выплат аннуитетных платежей можно представить следующим образом:



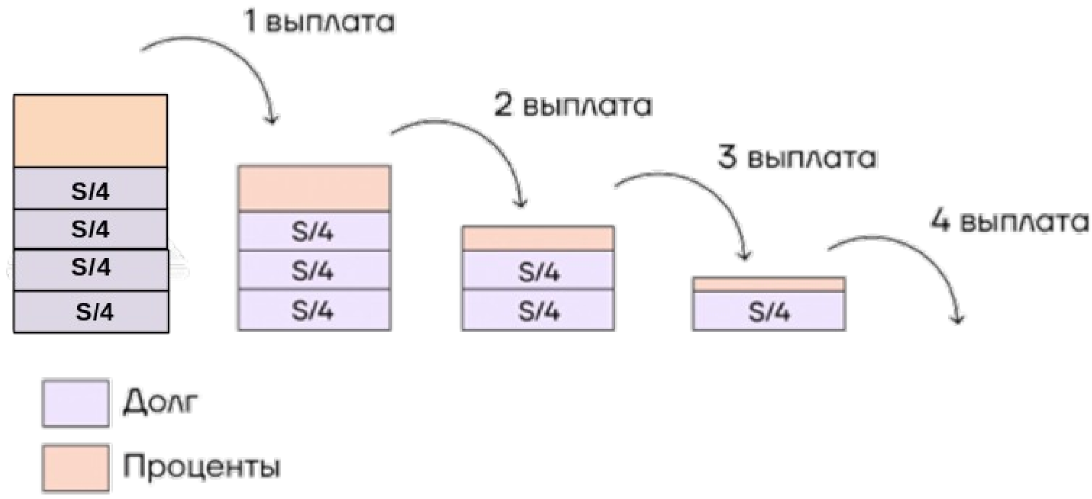
С каждой выплатой уменьшается как сам долг, так и начисленный на него процент.

Для решения задачи про аннуитетные платежи. необходимо в постановке задачи найти ключевые слова:

- выплаты равны между собой;
- выплаты фиксированные;
- сам долг уменьшается неравномерно.

Дифференцированные платежи — такая система выплат, при которой сумма долга уменьшается равномерно.

В этом случае сумма кредита делится на несколько равных частей, которые выплачиваются банку вместе с начисленными на остаток процентами. Из этих двух частей будет складываться платёж — причём с каждым периодом он будет уменьшаться, поскольку будет уменьшаться и процент, который начисляется на остаток.



3. Примеры решения задач

Задача 1

Рассмотрим задачу, которая раскрывает суть понятия «дифференцированный платеж» на простом примере. Допустим, что в банке взят кредит 1200 рублей на 12 месяцев. Причем, каждый платежный период долг сначала возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего платежного периода, а затем вносится оплата так, что долг становится на одну и ту же величину меньше долга на конец предыдущего платежного периода. Необходимо ответить на вопросы: Какую сумму нужно вернуть банку за весь платежный период? Какова сумма переплаты?

Решение. Долг перед банком по состоянию на конец года должен уменьшаться до нуля равномерно, то есть последовательность долгов перед банком такова:

1200;1100; 1000; 900;800; 700; 600; 500; 400; 300; 200;100.

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 10%. Тогда последовательность долгов будет такова:

1200·1,1; 1100·1,1; 1000·1,1; 900·1,1; 800·1,1; 700·1,1; 600·1,1; 500·1,1; 400·1,1; 300·1,1; 200·1,1;100·1,1. или 1320; 1210; 1100;990; 880; …110.

Обращаем внимание на то, разница между долговыми суммами равна 110 рублей. Теперь найдем ежемесячные выплаты:

1 месяц- 1320-1100=220

2 месяц- 1210-1000=210

3 месяц- 1100- 900=200

4 месяц- 990- 800=190

5 месяц – 880-700=180 и так далее. И последняя **наименьшая** выплата равна 110 рублей. Замечаем, что выплаты уменьшаются ежемесячно на 10 рублей.

Такова схема дифференцированного платежа. Далее можно найти сумму всех выплат. Она равна: 220+210+200+…+110 = 1980 (рублей). Таким образом, переплата составляет 65%.

Задача 2

15-го января 2015 года планируется взять кредит в банке на сумму 1.5 млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования? Какова сумма переплаты?

Решение. Построим математическую модель этой задачи и исследуем ее. Пусть *S*- сумма кредита. Долг перед банком по состоянию на конец второго года должен уменьшаться до нуля <u>равномерно</u>. Тогда последовательность размеров долга будет иметь вид:

$\frac{24S}{24}$; $\frac{23S}{24}$; $\frac{22S}{24}$; …; $\frac{S}{24}$. Занесем эти данные в таблицу:

Месяц и год	15 января 2015 г	15 февраля 2015 г	15 марта 2015г	15 апреля 2015г	…	15 декабря 2016 года	15 января 2017 года
Долг перед банком	$\frac{24S}{24}$	$\frac{23S}{24}$	$\frac{22S}{24}$	$\frac{21S}{24}$	…	$\frac{S}{24}$	0

Найдем теперь размеры выплат:

1 месяц: $\frac{24\cdot S\cdot 1.03}{24}$ - $\frac{23S}{24}$ = $\frac{S}{24}$ (24·1.03 – 23).

2 месяц: $\frac{23S\cdot 1.03}{24}$ - $\frac{22S}{24}$ = $\frac{S}{24}$ (23·1.03 – 22).

3 месяц:: $\frac{22S\cdot 1.03}{24}$ - $\frac{21S}{24}$ = $\frac{S}{24}$ (22·1.03 – 21).

………………………………………………

24 месяц: $\frac{S\cdot 1.03}{24}$ - $0 = \frac{S}{24}$ (1·1.03 – 0).

Найдем сумму всех выплат:

$\frac{S}{24}$ (24·1.03+23·1.03+22·1.03+…+1·1.03-23-22-21-…-1) =

= $\frac{S}{24}$ (1.03(24+23+22+…+1) –(23+22+21+…+1)) = $\frac{S}{24}$ (1.03·300–276) = $\frac{S}{24}$·33 =$\frac{11\cdot S}{8}$

Чтобы найти численное значение суммы всех выплат, надо подставить *S*=1,5. Получим, что сумма всех выплат равна 2,0625 миллионов рублей, или 2062500 рублей. Найдем сумму переплаты: 2062500-1500000=562500 (рублей).

Ответ: 2062500 рублей; 562500 рублей.

Задача 3

В июле планируется взять кредит 13 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы: каждый январь долг возрастет на 20% по сравнению с концом предыдущего года; в июле каждого года необходимо выплатить часть долга; в конце июля каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга по сравнению с концом предыдущего года. Чему равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наименьший годовой платеж равен 1,56 млн рублей?

Решение. Заметим, что наименьшая выплата в условиях дифференцированного платежа – последняя. Она равна $\frac{13}{n}$·1,2. Составим уравнение: $\frac{13}{n}$·1,2= 1,56. Отсюда находим, что n = 10. Значит, кредит взят на 10 лет.

Найдем теперь размеры выплат:

1 год:$\frac{10\cdot 13\cdot 1.2}{10}$ - $\frac{9\cdot 13}{10}$ = $\frac{13}{10}$ (1.2·10 – 9).

2 год:$\frac{9\cdot 13\cdot 1.2}{10}$ – $\frac{8\cdot 13}{10}$=$\frac{13}{10}$ (1.2·9 – 8).

…………….

10 год:$\frac{13}{10}$ (1.2·1– 0).

Найдем сумму всех выплат: $\frac{13}{10}$(1,2·(10+9+…+1) – (9+8+…+1)) =27,3.

Значит, сумма всех выплат равна 27,3 млн рублей.

Задача 4

15-го января планируется взять кредит в банке на 15 месяцев. Условия его возврата таковы: 1-го числа каждого месяца долг возрастет на *r*% по сравнению с концом предыдущего месяца; со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 24% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Решение. Пусть S сумма кредита, a= 1+0,01r. Долг перед банком должен уменьшаться до нуля <u>равномерно</u>. Тогда последовательность размеров долга будет иметь вид:

$\frac{15S}{15}; \frac{14S}{15}; \frac{13S}{15}; \ldots \frac{S}{15}$.

Найдем выплаты:

1 месяц: $\frac{15S \cdot a}{15} - \frac{14S}{15} = \frac{S}{15}(15 \cdot a - 14)$.

2 месяц: $\frac{14S \cdot a}{15} - \frac{13S}{15} = \frac{S}{15}(14 \cdot a - 13)$.

……………………………………………

15 месяц:

Найдем сумму всех выплат:

$\frac{S}{15}(a(15+14+13+\ldots+1) - (14+13+12+\ldots+1)) = \frac{S}{15}(a \cdot 120 - 105) = S(8a - 7)$.

По условию общая сумма выплат после полного погашения кредита на 24% больше суммы, взятой в кредит. Значит, $S(8a - 7) = 1{,}24\, S$. Решая это уравнение, находим a=1,03. Так как a= 1+0,01r, то r = 3%.

Ответ: 3%

Рассмотрим задачу, которая раскрывает понятие «**аннуитетный** платеж».

В общем виде задача формулируется так: 31 декабря 2014 года Андрей взял в банке ***S*** рублей в кредит под ***a*** процентов годовых. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего года банк начисляет ***a*** процентов на оставшуюся сумму долга. Затем Андрей переводит в банк сумму ***X*** ежегодного платежа (транш). Весь долг Андрей должен выплатить за ***n*** лет, то есть за ***n*** равных платежей. Необходимо найти одну из неизвестных величин: ***S, a, X,* или *n*.**

Задача 5. Нахождение количества лет выплаты кредита

Максим хочет взять в банке кредит 1,5 миллиона рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными платежами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Процентная ставка 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Максим взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 350 тысяч рублей?

Решение.

1) В конце первого года долг составит:

$$1500000 \cdot 1{,}1 - 350000 = 1300000 \text{ (р.)}$$

2) В конце второго года долг составит:

$$1300000 \cdot 1{,}1 - 350000 = 1080000 \text{ (р.)}$$

2) В конце третьего года долг составит:

$$1080000 \cdot 1{,}1 - 350000 = 838000 \text{ (р.)}$$

4)В конце четвертого года долг составит:

$$838000 \cdot 1{,}1 - 350000 = 571800 \text{ (р.)}$$

5)В конце пятого года долг составит:

$$571800 \cdot 1{,}1 - 350000 = 278980 \text{ (р.)}$$

6) В конце шестого года долг составит:

$$278900 \cdot 1{,}1 = 306878 \text{ (р.)}$$

Эта сумма менее 350000 руб. Значит, кредит будет погашен за 6 лет.

Ответ: 6 лет

Задача 6. Вычисление процентной ставки по кредиту.

31 декабря 2014 года Валерий взял в банке 1000000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая. 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Валерий переводит в банк очередной транш. Валерий выплатил кредит за два транша, то есть за два года. В первый раз Валерий перевел в банк 660000 рублей, во второй раз – 484000 рублей. Под какой процент банк выдал кредит Валерию?

Решение. Пусть a - процентная ставка по кредиту.

1) В конце первого года долг составит:

$$1000000 \cdot (1 + 0{,}01 \cdot a) - 660000 = 340000 + 10000 \cdot a$$

2) В конце второго года долг составит:

$$(340000 + 10000 \cdot a) \cdot (1 + 0{,}01 \cdot \text{a}) - 484000.$$

По условию задачи кредит будет погашен за два года. Составляем уравнение: $(340000 + 10000 \cdot a) \cdot (1 + 0{,}01 \cdot a) - 484000 = 0$;

$$a^2 + 134 \cdot a - 1440 = 0$$

Решая уравнение, получаем, что $a = 10$.

Ответ: 10%

Задача 7. Нахождение суммы кредита

31 декабря 2014 года Максим взял в банке некоторую сумму денег в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Михаил переводит в банк 2928200 рублей. Какую сумму взял Михаил в банке, если он выплатил долг четырьмя равными платежами, то есть за 4 года?

Решение. Пусть S – сумма кредита.

1)В конце первого года долг составит: $(1{,}1x - 2928200)$ рублей

2) В конце второго года долг (в рублях) составит:

$(1{,}1x - 2928200) \cdot 1{,}1 - 2928200 = 1{,}21x - 3221020 - 2928200 = 1{,}21x - 6149220$

3) В конце третьего года долг (в рублях) составит:

$(1{,}21x - 6149220) \cdot 1{,}1 - 2928200 = 1{,}331x - 6764142 - 2928200 =$
$= 1{,}331x - 9692342$

4) В конце четвертого года долг (в рублях) составит 2928200 рублей:

$(1{,}331x - 9692342) \cdot 1{,}1 = 2928200$;

$1{,}4641x - 10661576 = 2928200$;

$1{,}4641x = 13589776$;

x = 9281999,8.

Значит, сумма кредита равна 9282000 рублей.

Ответ: 9282000 рублей.

Задача 8. Нахождение ежегодного транша

31 декабря 2014 года Роман взял в банке 8599000 рублей в кредит под 14% годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14%), затем Роман переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Роман выплатил долг тремя равными платежами (то есть за 3 года)?

Решение.

1) В конце первого года долг составит:

$$8599000 \cdot 1{,}14 - X = 9802860 - X$$

2) В конце второго года долг составит:

$$(9802860 - X) \cdot 1{,}14 - X = 11175260 - 2{,}14 \cdot X$$

3) В конце третьего года долг (в рублях) составит:

$$(11175260 - 2{,}14 \cdot X) \cdot 1{,}14 - X = 12739796 - 3{,}4396 \cdot X.$$

Составим уравнение:

$12739796 - 3{,}4396 \cdot X = 0$

X=3703860 рублей

Ответ: ежегодный транш составит 3703860 рублей.

4. ***Решение задач линейного программирования***.

Методами математического программирования решается большинство задач планирования, частные прикладные задачи, множество задач управления в разных сферах экономики.

Задачи линейного программирования включают целевую функцию и систему ограничений, показанную неравенствами. Задача линейного программирования показывает нахождение оптимального решения (наибольшего или наименьшего значения линейной функции) при условии, что целевая функция и система ограничений линейны. Решение задач линейного программирования в определенных случаях осуществляется двумя методами: графическим и симплекс-методом. Графический метод используется преимущественно при решении задач с двумя переменными.

В школьном курсе математики можно рассматривать задачи линейного программирования, содержащие две переменные. Модель задачи в этом случае имеет вид:

$$F(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задачу можно решить графическим способом. Действительно, целевая функция является линейной, и её линией уровня будет прямая. Все неравенства в системе ограничений являются линейными, решение каждого неравенства можно изобразить на плоскости как полуплоскость, расположенную по одну сторону от некоторой прямой. Таким образом, пересечение всех полуплоскостей и будет являться областью допустимых решений.

Графический метод предполагает поэтапное выполнение следующих шагов:

- построить область допустимых решений (полигон решений), определяемую ограничениями задачи;
- построить градиент целевой функции (градиент – вектор, координатами которого служат коэффициенты целевой функции);
- провести произвольную линию уровня целевой функции, перпендикулярную к градиенту;
- решая задачу на максимум необходимо перемещать прямую в направлении вектора-градиента, пока она не коснется в последний раз крайней точке допустимого множества;
- решая задачу на минимум линию уровня следует сдвигать в противоположном направлении градиента до конечного касания с областью допустимых решений;
- найти координаты точки оптимума и вычислить в данной точке значение целевой функции.

Задача. Пусть швейная фабрика выпускает мужские и женские костюмы, и для их пошива использует ткани четырёх видов A, B, C и D. Известны величины расходов каждого вида ткани на производство одного мужского и одного женского костюма, а также имеющиеся запасы тканей, заданные в таблице:

Виды тканей	Расход ткани на изготовление одного костюма (условных единиц)		Запасы тканей (тыс. усл. ед.)
	Мужские костюмы	Женские костюмы	
A	2	4	32
B	3	2	24
C	3	0	18
D	0	4	28

Известно, что реализация одного мужского костюма приносит доход в 3 условных единиц, а одного женского — 4 условных единиц. Требуется составить оптимальный план выпуска товаров, то есть такой план, при котором с учётом имеющихся ресурсов тканей доход от реализации костюмов будет наибольшим.

Решение. Построим математическую модель задачи. Введём переменные x_1, x_2 — количество мужских и женских костюмов соответственно (тыс. шт.). Тогда суммарный доход от их реализации определяется выражением $F(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$, которое необходимо исследовать на максимум. По имеющимся исходным данным определяем ограничения по ресурсам каждого вида тканей. Они определяются неравенствами:

$2x_1 + 4x_2 \leq 32$ — для тканей вида A;

$3x_1 + 2x_2 \leq 24$ — для тканей вида B;

$3x_1 + 0x_2 \leq 18$ — для тканей вида C;

$0x_1 + 4x_2 \leq 28$ — для тканей вида D.

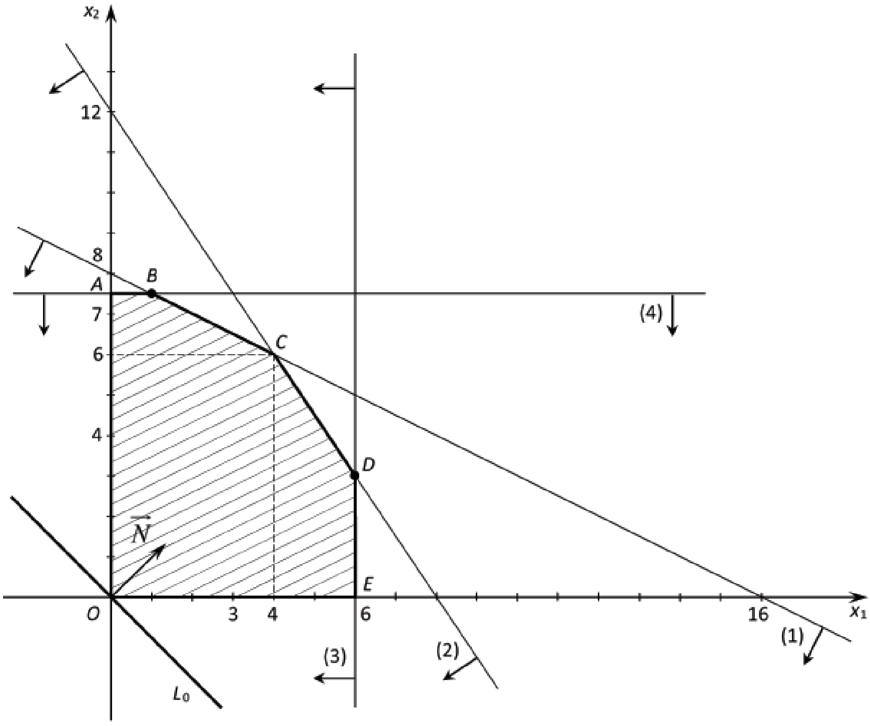
Количество выпускаемых костюмов есть величина неотрицательная, поэтому $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Таким образом, получаем: $F(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 32, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 24, \\ 3x_1 \leq 18, \\ 4x_2 \leq 28, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Построим область допустимых решений. Заменив в неравенствах системы ограничений и условиях неотрицательности переменных знаки неравенств на знаки точных равенств, построим по двум контрольным точкам прямые, соответствующие этим равенствам, и для удобства пронумеруем все прямые:

$$\begin{array}{lll} 2x_1 + 4x_2 = 32, & (16;0), (0;8), & (1) \\ 3x_1 + 2x_2 = 24, & (8;0), (0;12), & (2) \\ 3x_1 = 18, & (6;0), (6;6), & (3) \\ 4x_2 = 28, & (0;7), (7;7), & (4) \\ x_1 = 0, & ось OX_1 & (5) \\ x_2 = 0, & ось OX_2 & (6) \end{array}$$



Построим полуплоскости с этими граничными прямыми и найдём их пересечение. Получим шестиугольник *OABCDE*, который и представляет собой ОДР. Затем строим линию нулевого уровня $L_0 : 3x_1 + 4x_2 = 0$, она пройдёт через начало координат, построим также нормальный вектор $N = (3; 4)$. Передвигая линию уровня $L0$ в направлении вектора N параллельно самой себе, найдём крайнюю точку выхода из ОДР, в которой линия уровня займёт положение опорной прямой. В нашем случае это будет точка C, которая будет точкой максимума целевой функции. Найдём координаты точки C как точки пересечения прямых (1) и (2), решив систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 32, \\ 3x_1 + 2x_2 = 24. \end{cases}$$

В результате получим: $\begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = 6. \end{cases}$

Значит, $C(4;\ 6)$—точка максимума, и тогда $F_{\max} = F(4;6) = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 6 = 36$.

Таким образом, фабрике следует выпускать 4 тысячи мужских костюмов и 6 тысяч женских костюмов, при этом доход будет наибольшим и составит 36 тысяч условных единиц.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Обработка деталей *A* и *B* может производится на трех станках. Причем каждая деталь при ее изготовлении должна последовательно обрабатываться на каждом из станков. Прибыль при реализации детали *A* составляет 10 руб., детали *B* – 16 руб. Исходные данные задачи представлены в таблице:

Станки	Нормы времени на обработку детали, ч.	Время работы станка, ч.

	A	*B*	
1	0,2	0,1	100
2	0,2	0,5	180
3	0,1	0,2	100

Определить производственную программу, максимизирующую прибыль при условии: деталей *A* произвести не менее 300 ед., а деталей *B* не более 200 ед. (Ответ: (400; 200)).

2. Торговая организация планирует реализацию по двум товарным группам, по которым соответственно выделены фонды 80 тыс. руб. и 50 тыс. руб. Уровень транспортных издержек составляет по этим товарам соответственно 1% и 2%, уровень издержек, связанных с хранением товаров – 2% и 1%, уровень прибыли – 3% и 2%. Предельно допустимые расходы, вязанные с перевозкой и хранением товаров, равны 2,5 тыс. руб. и 2,9 тыс. руб. С учетом закупки товаров сверх выделенных фондов определить оптимальную структуру товарооборота, обеспечивающую торговой организации максимальную прибыль. (Ответ: (110; 70)).