

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра технической физики

Лаборатория механики и молекулярной физики

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 136 – Д

**МАКСВЕЛЛОВСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ
МОЛЕКУЛ
ПО СКОРОСТЯМ. ОПЫТЫ ШТЕРНА И
ИСТЕРМАНА**

Авторы: Крейдик Л.Г., Смурага Л.Н.

Минск 2007

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Цель работы:

Изучение основных положений молекулярно-кинетической теории и вероятностных методов описания и анализа атомно-молекулярных систем.

Задачи:

1. На основе компьютерного эксперимента изучить характер максвелловского распределения молекул по скоростям, включая распределение Гаусса, и определить основные параметры распределений.
2. Сравнить распределение молекул в объеме, пучке и опытах Штерна.
3. Провести компьютерный эксперимент с распределением молекул в гравитационном поле в опытах Истермана.
4. Сравнить все распределения.

Вопросы к работе:

1. Назовите основные положения молекулярно-кинетической теории?
2. Что такое случайная величина и чем она определяется?
3. Что собой представляет функция распределения (кривая) Максвелла?
4. Как влияет температура на вид кривых Максвелла?
5. Каковы характерные скорости в распределении Максвелла?
6. Из каких основных частей состоит прибор Штерна? Принцип его действия.
7. Какая была определена скорость молекул в опытах Штерна?
8. Какая характерная скорость в распределении Максвелла определяет основное уравнение молекулярно-кинетической теории?
9. Какая характерная скорость в распределении Максвелла определяет среднюю длину свободного пробега молекул?
10. Сравнить распределения Гаусса, Максвелла, Штерна, Истермана.

Литература:

2. И.В. Савельев, Курс общей физики, т.1.
3. Б.М. Яворский, Курс общей физики, ч.1.
4. Теоретическое введение к работе.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

2.1. Распределения Максвелла в молекулярных объемах и связь с распределением в молекулярных пучках

Первые опыты с молекулярными пучками были выполнены во Франции Дюнуае в 1911 г. и привлекли к себе внимание многих исследователей (рис.1).

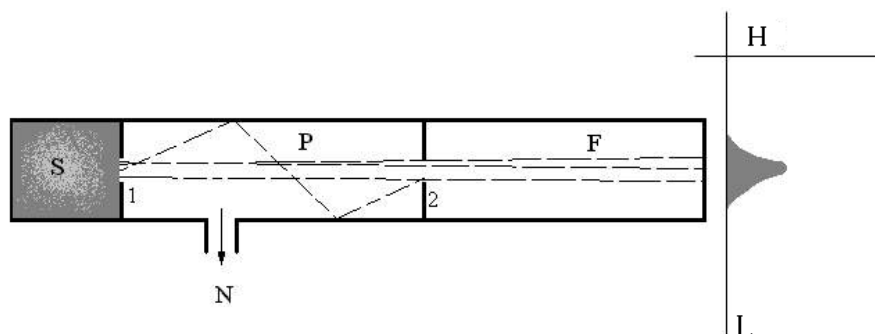


Рис.1. Камера Дюнуае

На рис.1 изображена камера Дюнуае для исследований молекулярных пучков; S - источник молекул; P - камера с коллимирующими щелями 1 и 2 для формирования узкого молекулярного пучка; N - канал, соединяющий камеру с насосом для удаления рассеянных молекул; F - камера наблюдения; I - интенсивность распределения молекул в пучке.

В идеале распределение скоростей в источнике (камере переменной температуры с исследуемым веществом S) определяет распределение в пучке.

Во всякой системе, находящейся даже в тепловом равновесии, т.е. когда характеризующие ее параметры (P , $V_{уд}$, T и др.) не изменяются, непрерывно происходят микропроцессы: беспорядочное движение молекул, их столкновения между собой, в результате чего постоянно перераспределяются скорости молекул. Однако средняя квадратичная скорость

$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$ молекул газа остается при этом неизменной. Объясняется это тем, что в

газе, находящемся в условиях равновесия, всегда устанавливается некоторое стационарное распределение молекул по скоростям в интервале от v до $v+dv$. Если вследствие столкновений в определенном промежутке времени Δt некоторое число Δn молекул со скоростями в интервале от v до $v+dv$ изменит свои скорости, то примерно столько же частиц, обладающих ранее другими скоростями, приобретут скорости соответствующие данному интервалу.

Устанавливающееся в условиях термодинамического равновесия распределение молекул по скоростям подчиняется определенному статистическому закону, который был теоретически выведен Максвеллом (1859г.) и обоснован Н.Н.Пироговым (1855-1886гг.), установившим границы его применимости и распространившим его на многоатомные газы.

В 1860 г. Максвелл (Джеймс Клерк Максвелл), используя теорию вероятностей, и предположив, что все молекулы газа одинаковы, а также одинакова температура во всех частях сосуда, содержащего газ, нашел, что в случае отсутствия внешних воздействий, молекулы распределяются по скоростям так, что число молекул dn , обладающих скоростями, лежащими в интервале от некоторой скорости v до $v+dv$, может быть подсчитано по формуле:

$$dn = n4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{1}{2} m_0 v^2 / (kT) \right) v^2 dv \quad (1)$$

Приведенное выше распределение выражает статистический закон, точность которого возрастает с увеличением числа n молекул в системе.

Кривую, определяемую выражением (1), обычно называют *кривой Максвелла*. Общий вид ее показан на рис. 2, где на оси абсцисс отложены скорости молекул v , а на оси ординат – величина $f(v) = \frac{dn}{n}$ – функция распределения, определяет относительное число молекул, скорости которых лежат в интервале от v до $v+dv$.

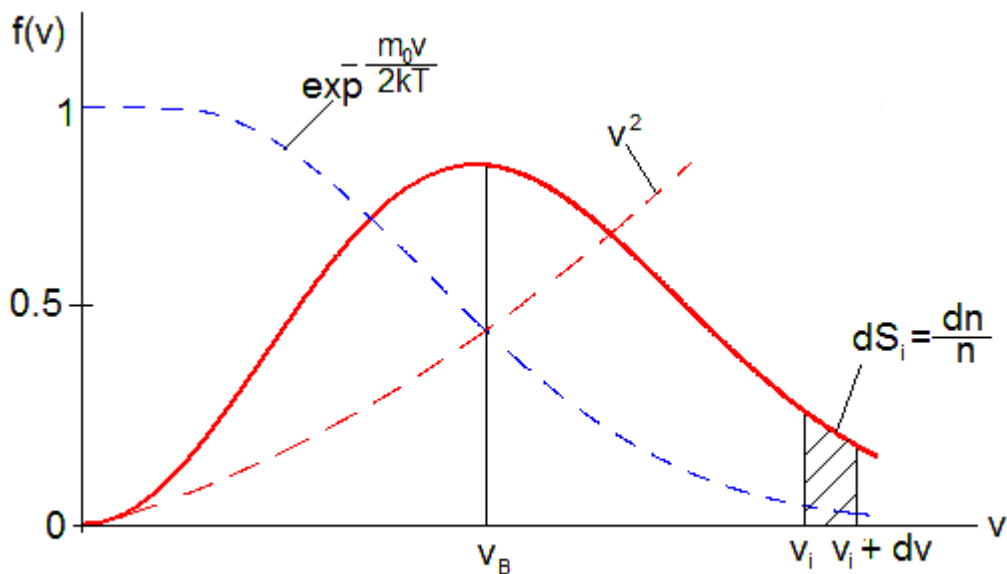


Рис. 2

Из рис. 2 видно, что эта кривая, начиная с нуля, по мере увеличения скорости v круто возрастает, достигает максимума, после чего полого опускается, асимптотически приближаясь к оси абсцисс при бесконечном росте v . Площадь, охватываемая этой кривой, равна единице, поскольку $\int_0^{\infty} f(v) dv = 1$.

Скорость соответствующая максимальному значению функции распределения, является наиболее вероятной скоростью молекул (v_B).

Возрастающая ветвь кривой $f(v)$ обуславливается множителем v^2 , увеличивающимся с ростом v , ниспадающая – множителем $\exp \left(-\frac{1}{2} m_0 v^2 / (kT) \right)$, уменьшающимся по мере роста v . При небольших скоростях превалирующим оказывается первый множитель, при больших – второй.

Конкуренция этих множителей приводит к кривой с положительным максимумом. То, что кривая начинается с нуля, означает, что неподвижных молекул в газе нет, а то, что она асимптотически приближается к оси абсцисс при бесконечном росте v , показывает, что очень большие скорости маловероятны. Для приобретения очень большой скорости, необходимо,

чтобы молекула испытала много соударений, при которых энергия должна передаваться только ей одной, но такие процессы маловероятны. Обычно после столкновений скорости перераспределяются между обеими сталкивающимися частицами.

Доля $\frac{dn}{n}$ общего числа молекул n со скоростями v_i до $v_i + dv_i$ изображена на рис. 2

площадью dS_i , ограниченной частью функции $f(v)$, осью v и ординатами v_i и $v_i + dv_i$. Поскольку кривая Максвелла асимметрична (правая ее ветвь со стороны больших скоростей более пологая, чем левая со стороны малых), то площадь между правой, пологой спадающей частью и осью абсцисс больше, чем между крутой левой частью и этой же осью. Так как эти площади пропорциональны числу молекул со скоростями, соответственно большими и меньшими v_B , то, следовательно, в газе больше молекул со скоростями, превышающими v_B , чем со скоростями, не достигающими ее. Наибольшее число молекул имеют скорости, близкие к v_B .

Форма кривой распределения в координатах $f(v)$, v и положение ее максимума зависят от массы (m_0) молекул и температуры (T) газа. С повышением температуры кривая $f(v)$ становится более пологой, максимум ее понижается и смещается в сторону более высоких скоростей (рис. 3). Поскольку повышение температуры не сопровождается изменением числа молекул в системе, то площади, ограниченные кривыми $f(v)$ и осью абсцисс, при различных температурах должны сохраняться неизменными.

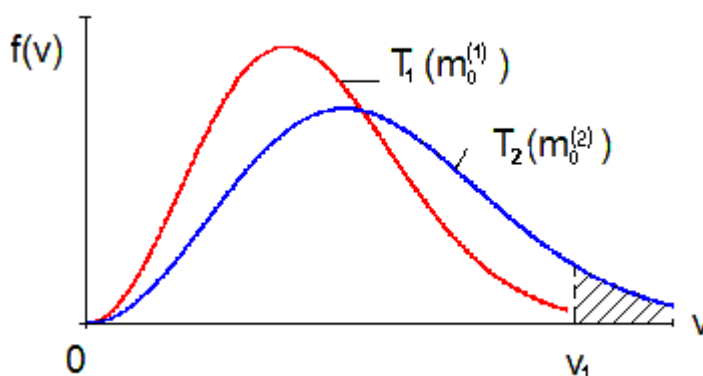


Рис. 3

Однако, как показывают расчеты, число молекул со скоростями в интервале от v_i до $v_i + dv_i$ с ростом температуры уменьшается.

На рис. 3 изображены две кривые, которые можно трактовать как кривые, которые относятся либо к различным температурам T_1, T_2 (при $m_0^{(1)} = m_0^{(2)}, T_1 > T_2$), либо к различным массам $m_0^{(1)}$ и $m_0^{(2)}$ молекул (при $T_1 = T_2$ и $m_0^{(1)} > m_0^{(2)}$).

Из рис. 3 видно, что по мере роста температуры относительное число молекул со скоростями $v > v_1$ увеличивается.

В 1885 году Пирогов доказал, что максвелловское распределение молекул по скоростям возможно, строго говоря, только в газе, который занимает неограниченный объем. В этом случае наступает равновесное состояние, при котором в объеме с определенной скоростью будет двигаться строго определенное количество молекул, неменяющееся со временем. Если же газ находится в сосуде конечных размеров, то скорости молекул не превысят некоторой определенной величины, которая зависит от размеров сосуда и тогда распределение скоростей молекул значительно отличается от максвелловского.

Ввиду принципиальной важности распределения Максвелла для статистической физики оно было подвергнуто тщательной экспериментальной проверке. Непосредственно проверить распределение Максвелла молекул по скоростям в объеме газа невозможно,

поскольку направления движения молекул в объеме распределены случайно, и никакими прямыми методами нельзя осуществить регистрацию их движений и распределений по скоростям. Поэтому в опытах используются молекулярные пучки.

Справедливость максвелловского распределения весьма точно была проверена экспериментально Истерманом и Штерном путем измерения отклонения пучка атомов цезия.

Формула, связывающая распределение молекул в объеме $f(v)$ с распределением молекул в молекулярных пучках F_{jv} имеет вид, если принять во внимание, что в формуле (2) под F следует понимать $f(v)$:

$$F_{jv} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} uF. \quad (2)$$

Вывод формулы (2) приводится в приложении 1.

Поскольку функция распределения Максвелла $f(v)$ имеет смысл плотности вероятности того, что молекула имеет скорость в интервале от v до $v + dv$, с помощью интегрирования можно вычислить среднюю арифметическую $\langle v \rangle$ и среднюю квадратичную $\langle v_{\text{кв}} \rangle$ скорости молекул:

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v f(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}},$$

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\int_0^{\infty} v^2 f(v) dv} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}.$$

Полученные выражения носят название характерных скоростей распределения Максвелла:

$$v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} - \text{наиболее вероятная скорость молекул,}$$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} - \text{средняя арифметическая скорость молекул.}$$

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} - \text{средняя квадратичная скорость молекул,}$$

Для нахождения $\langle v_{\text{кв}} \rangle$ можно было воспользоваться выражением для средней кинетической энергии $\langle \epsilon \rangle$ поступательного движения молекулы газа

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{3}{2} kT.$$

Используя также определение $\langle \epsilon \rangle = \frac{m_0 \langle v_{\text{кв}}^2 \rangle}{2}$, получим

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}.$$

2.2. Распределения Гаусса

Слова «случайная величина» в обыденном смысле употребляется тогда, когда хотят подчеркнуть, что неизвестно, каким будет конкретное значение этой величины.

Нормальной или гауссовской случайной величиной называется случайная величина ξ , определяемая на всей оси $(-\infty, \infty)$ и имеющая плотность

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad (3)$$

Где a и $\sigma > 0$ - числовые параметры.

Параметр a не влияет на форму кривой $y=P(x)$: изменение его приводит лишь к сдвигу кривой вдоль оси x .

Однако при изменении σ форма кривой меняется. Но вся площадь под кривой $y=P(x)$ по условию

$$\int_a^b P(x) dx = 1.$$

Поэтому кривая будет вытягиваться вверх в окрестности $x=a$, но убывать при всех достаточно больших значениях x .

На рис.4 построены две нормальные плотности, соответствующие $a=0$, $\sigma=1$ и $a=0$, $\sigma=0.5$.

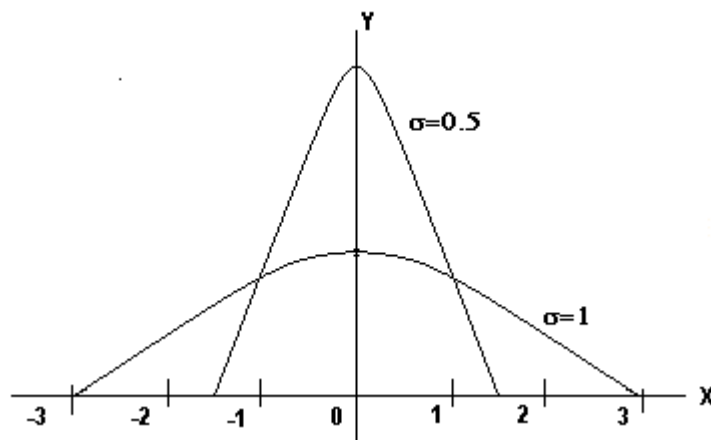


Рис.4. Функция распределения Гаусса

Распределение плотностей вероятностей называется *распределением Гаусса* (рис.4) по имени немецкого математика Гаусса Карла Фридриха(1777-1855).

Процессы, изучающиеся в молекулярной физике, являются результатом взаимодействия огромного числа молекул. Свойства большого числа частиц как единого целого отличаются от свойств каждой отдельной частицы. Каждая отдельная частица подчиняется законам динамики. В целом макроскопическая система подчиняется статистическим законам. Макросистемы обладают такими свойствами, которых нет у отдельной частицы, например температура. Это понятие к отдельной частице неприменимо. Температура определяется средним значением скорости хаотического движения молекул. Но, несмотря на хаотичный характер движения молекул, для всей системы в целом складываются статистические закономерности, так называемые статистические распределения. Статистические распределения имеют типичный график - кривую распределения Гаусса (см. рис.4). Если под плотностью вероятности понимать число случайных событий, а под x - случайную величину, то из рисунка будет видно: чем больше данная случайная величина отличается от среднего значения, тем она реже встречается в статистическом распределении - это твердый порядок в хаосе.

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

3.1. Опыт Штерна

Хаотичность движения атомов или молекул предопределяет равновероятность всех направлений скоростей частиц в пространстве, но их численные значения при этом оказываются неодинаковыми. В газе могут встречаться медленные частицы, скорости которых близки к нулю, и очень быстрые – скорости которых во много раз превосходят среднюю скорость молекулярного движения в данных условиях. Прямое измерение разброса скоростей атомов, возникающего в результате теплового испарения, впервые было выполнено О. Штерном в 1920 г. Схема опыта Штерна представлена на рис.5. Платиновая нить, покрытая тонким слоем вещества (например серебром, как изначально в опыте Штерна), располагалась вдоль оси коаксиальных цилиндров *A* – (внутреннего) и *B* – (наружного) радиусом r . При пропускании электрического тока платиновая нить разогревалась до температуры выше точки плавления вещества (серебра). Вещество интенсивно испарялось, и его атомы летели по всем радиальным направлениям. Для того чтобы атомы вещества не отклонялись из-за столкновения с атомами воздуха, внутри цилиндра поддерживался вакуум. Все атомы вещества независимо от значения их скоростей достигали внутренней поверхности цилиндра *A* и ровным слоем ее покрывали. Этот факт как раз и указывает на изотропное распределение скоростей атомов вещества, т.е. равновероятность всех направлений для их скоростей. Продольная щель в цилиндре *A* формирует узкий пучок атомов вещества (молекулярный пучок), который содержит атомы с различными скоростями. Все атомы пучка, достигнув поверхности внешнего цилиндра *B*, оседали на ней в виде узкой полосы, параллельной оси цилиндров. Толщина осевшего слоя серебра при этом будет описываться распределением Гаусса.

Ситуация резко меняется, если оба соединенных друг с другом цилиндра привести во вращение с угловой скоростью ω . В этом случае происходит как бы «сепарация» атомов в зависимости от значения их скорости v , что приводит к смещению и размыванию полосы на поверхности внешнего цилиндра. Только очень быстрые атомы оседают на внешнем цилиндре практически напротив щели, тогда как более медленные будут осаждаться со смещением, как это показано на рис.5. Смещение точек осаждения атомов зависит от ω и объясняется тем, что относительная скорость атомов отклонена от радиального направления в сторону, противоположную вращению цилиндров.

Толщина слоя вещества и его длина тесным образом связаны со скоростями оседающих атомов и соответствуют распределению числа молекул по скоростям в потоке. Вывод рабочей формулы приводится в приложении 2.

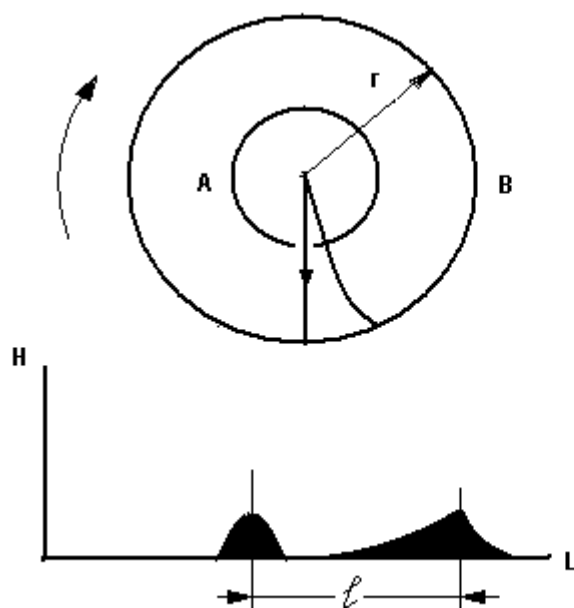


Рис.5. Схема опыта Штерна: А – внутренний цилиндр со щелью; В – наружный цилиндр; r - радиус наружного цилиндра; l - смещение осажденного слоя вещества относительно слоя с неподвижными цилиндрами

Компьютерное моделирование опыта Штерна

Используя манипулятор “мышь”, в дальнейшем **ММ**, или клавишу F10 в главном меню, выберите режим работы. Если выбрали “Опыты” а в нем **опыт Штерна**, то выходите на рабочее меню данного опыта.

Введите исходные данные для эксперимента, используя **ММ** или функциональные клавиши от **F2** до **F6**:

- число оборотов цилиндра **n**;
- радиус цилиндра **r**;
- температуру нити **T**;
- материал, нанесённый на нить **D**;
- время эксперимента **t**.

Запустите эксперимент на выполнение, нажав клавишу “Старт” рабочего меню.

Появится окно с осевшим слоем на внешнем цилиндре выбранного материала. Зарисуйте кривую распределения молекул осевшего слоя и определите максимальную высоту его **H** путем сканирования графической зависимости.

Исследуйте следующие зависимости (на усмотрение преподавателя):

$$H=f(n, r, T, D, t).$$

Объясните зависимости, запишите выводы.

С помощью встроенного в программу калькулятора рассчитайте и запишите наиболее вероятную скорость атомов v_B в проделанных опытах, для этого используйте формулу

$$v_B = \frac{\omega r^2}{l}.$$

Установите, от каких параметров и как зависит v_B ? Запишите выводы.

Исследуйте следующие зависимости (на усмотрение преподавателя):

$$v_B = f(n, r, T, D, t).$$

Для построения функциональных зависимостей рекомендуется заполнить таблицу 1.

Как пример, табл.1 пригодна для изучения $N, v_B = f(T)$. Как зависит N и v_B от других параметров, табл.1 следует соответственно перестроить по параметру аргумента.

Таблица 1. Исходные данные для построения функциональных зависимостей $N = f(n, r, T, D, t)$ и $v_B = f(n, r, T, D, t)$.

№п/п	T, К	l, мкм	N, нм	v_B , м/с
1				
2				
3				
4				
5				

Объясните зависимости, запишите выводы.

3.2. Распределение (в гравитационном поле) в опыте Истермана

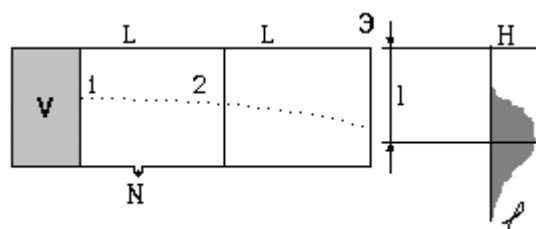


Рис. 6. Опыт по распределению молекул с учётом гравитационного поля

Принципиальная схема экспериментальной установки состоит в следующем (рис. 6). В объеме V помещен газ, находящийся в стационарном равновесном состоянии. Через отверстие 1 выходит пучок исследуемых молекул этого газа. Чтобы в процессе движения пучка распределение молекул в нем не изменялось, они должны двигаться практически без взаимодействия друг с другом. Поэтому на пути движения пучка создается высокий вакуум, а газ находится в сосуде V под низким давлением. Отверстие 1 по размерам должно быть много меньше длины свободного пробега молекул, т.е. среднего расстояния между последовательными столкновениями. В эксперименте с молекулярными пучками диаметр отверстия 1 составляет сотые доли миллиметра.

После выхода из отверстия 1 пучок проходит коллиматор 2, который выделяет движущиеся почти параллельно молекулы. Далее имеется устройство для сортировки молекул по скоростям (селектор) и детектор для регистрации молекул после сортировки. В опыте Истермана в качестве селектора молекул используется сила тяжести: более медленные молекулы, падая в гравитационном поле, за время пролета отклоняются в направлении к земле на большее расстояние, чем быстрые молекулы. Можно рассчитать величину смещения l молекул в зависимости от скорости:

Расчет отклонения молекул от скорости и высоту слоя сведен в приложение 3.

По смещению молекул можно рассчитать наиболее вероятную скорость

$$v_{\text{вг}} = L \sqrt{\frac{g}{2l}}.$$

Компьютерное моделирование опыта Истермана

Используя манипулятор **ММ**, или клавишу **F10**, в главном меню выберите режим работы. Если выбрали “**Опыты**” а в нем **Гравитационное распределение**, то выходите на рабочее меню данного опыта.

Введите исходные данные для эксперимента, используя **ММ** или функциональные клавиши от **F2** до **F6**:

- половинное расстояние между источником частиц (**V**) и экраном (**Э**)**L**;
- температура источника **T**;
- плотность исследуемого вещества **D**;
- время эксперимента **t**.

Запустите эксперимент на выполнение, нажав клавишу “**Старт**” рабочего меню.

Появится окно с осевшим слоем выбранного материала на внешнем цилиндре. Зарисуйте кривую распределения молекул осевшего слоя.

Исследуйте следующие зависимости (на усмотрение преподавателя) *качественно*:

$$H=f(L, T, D, t).$$

Объясните зависимости, запишите выводы.

Установите, от каких параметров и как зависит **Vв**? Запишите выводы.

3.3. Опыт по распределению Гаусса

В качестве экспериментальной установки взята схема опыта Штерна (Рис.5) только при условии, что цилиндры **A** и **B** не приводятся во вращение. В результате получим распределение молекул в потоке.

Используя манипулятор **ММ**, или клавишу **F10**, в главном меню выберите режим работы. Если выбрали “**Опыты**” а в нем **Опыт Гаусса**, то выходите на рабочее меню данного опыта. Введите исходные данные для эксперимента, используя **ММ** или функциональные клавиши от **F2** до **F6**:

- радиус цилиндра **r**;
- материал, нанесенный на нить **D**;
- время эксперимента **t**.

Запустите эксперимент на выполнение, нажав клавишу “**Старт**” рабочего меню.

Появится окно с осевшим слоем выбранного материала на внешнем цилиндре. Зарисуйте кривую распределения молекул осевшего слоя и определите максимальную высоту его **H**.

Исследуйте следующие зависимости (на усмотрение преподавателя):

$$H=f(r, D, t).$$

Объясните зависимости, запишите выводы.

3.4. Опыт по распределениям

Используя, манипулятор **ММ**, или клавишу **F10** в главном меню выберите режим работы. Если выбрали “**Опыты**” а в нем **Распределения, теория**, то выходите на рабочее меню данного опыта.

Введите исходные данные для эксперимента, используя **ММ** или функциональные клавиши от **F2** до **F6**:

- число оборотов цилиндра **n**;
- радиус цилиндра **r**;
- температуру нити **T**;

- материал, нанесённый на нить **D**;

- половинное расстояние между источником частиц (**V**) и экраном (**Э**)**L**.

Продолжительность эксперимента для всех распределений берется постоянной.

Запустите эксперимент на выполнение, нажав клавишу “**Старт**” рабочего меню.

Появятся окна с осевшим слоем на внешнем цилиндре выбранного материала. Зарисуйте кривые распределения молекул осевшего слоя $N=f(L, T, D, n, t)$ в опытах Максвелла, Штерна, Истермана и сравните эти кривые. Объясните их отличия.

Приложение 1.

Распределение в потоке

Пусть n - число частиц в единице объема, т.е. их плотность. Так как все направления движения частиц равновероятны, то число частиц $dn_{j\omega}$ в единице объема потока, скорости которых лежат в интервале от v до $v+dv$, и которые движутся в пределах телесного угла $\Delta\omega$, очевидно, относится так ко всему потоку частиц $dn = Fndv$ в этом же интервале, как величина телесного угла $\Delta\omega$ ко всему телесному углу в 4π стерадиан:

$$\frac{dn_{\omega}}{dn} = \frac{\Delta\omega}{4\pi}. \quad (2.1)$$

Дифференциалы dn_{ω} и dn носят название дифференциальных плотностей частиц соответственно в пределах телесного угла $\Delta\omega$ и полного угла, скорости которых лежат в интервале от v до $v+dv$.

На основании равенства (2.1) находим дифференциальное число частиц, которые движутся в потоке в пределах малого угла $\Delta\omega$:

$$dn_{\omega} = \frac{\Delta\omega}{4\pi} Fndv = \frac{\Delta\omega}{4\pi} n \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 e^{-u^2} \frac{dv}{v_n}, \quad (2.2)$$

где v_n - наиболее вероятная скорость.

Дифференциальный поток dj в пределах малого телесного угла $\Delta\omega$, т.е. дифференциальное число частиц, проходящее через единицу площади в единицу времени в интервале скоростей от v до $v+dv$, равен:

$$dj = \frac{dn_{\omega} dSvdt}{dSdt} = dn_{\omega} v = \frac{\Delta\omega}{4\pi} nFv dv. \quad (2.3)$$

Отсюда находим дифференциальную плотность потока j_v , определяемую отношением $\frac{dj}{dv}$:

$$j_v = \frac{\Delta\omega}{4\pi} nFv = \frac{\Delta\omega}{4\pi} n \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^3 e^{-u^2}, \quad (2.4)$$

Так как $u = \frac{v}{v_n}$ и $dv = v_n du$, то полный поток j_0 будет равен

$$j_0 = \int_0^{\infty} j_v dv = \int_0^{\infty} \frac{\Delta\omega}{4\pi} n \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^3 e^{-u^2} dv = \frac{\Delta\omega}{4\pi} n \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{v_n}{2}. \quad (2.5)$$

Таким образом, $\frac{\Delta\omega}{4\pi} = \frac{2j_0}{n \frac{4}{\sqrt{\pi}}}$ и

$$j_v = \frac{\Delta\omega}{4\pi} n \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^3 e^{-u^2} = \frac{2j_0}{v_n} u^3 e^{-u^2}. \quad (2.6)$$

Так как $dw = \frac{dj}{j_0} = \frac{j_v dv}{j_0} = \frac{2}{v_n} u^3 e^{-u^2} dv$ есть дифференциальная вероятность частиц в потоке, скорости которых лежат в интервале от v до $v+dv$, то функция распределения плотности вероятности частиц в потоке принимает вид:

$$F_{jv} = \frac{dw}{dv} = \frac{dn_{\Delta\omega}}{ndv} = \frac{dj}{j_0 dv} = \frac{j_v}{j_0} = \frac{2}{v_n} u^3 e^{-u^2}. \quad (2.7)$$

Сравнивая функцию распределения в потоке F_{jv} с функцией распределения Максвелла в источнике $f(v)$, имеем:

$$F_{jv} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} u F. \quad (2.8)$$

Таким образом, распределение частиц в источнике, соответствующее закону Максвелла, отличается от распределения частиц в потоке.

Наивероятная v_B , среднеарифметическая и среднеквадратичная v_{kv} скорости частиц в потоке соответственно равны:

$$v_B = \sqrt{\frac{3RT}{M}}, \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{9\pi RT}{8M}} = \sqrt{\frac{3.53429RT}{M}}, \quad v_{kv} = \sqrt{\frac{4RT}{M}}. \quad (2.9)$$

Приложение 2.

Распределение в опыте Штерна

За время пролета атома $\Delta t = \frac{r}{v}$ происходит смещение наружного барабана на величину

$$l = \omega r \Delta t = \frac{\omega r^2}{v} = \frac{\omega \cdot r^2}{v_n} \cdot \frac{1}{u} = \frac{l_0}{u}, \quad \text{где } l_0 = \frac{\omega \cdot r^2}{v_n} = \frac{2 \cdot \pi \cdot n \cdot r^2}{v_n}, \text{ и } n - \text{ число оборотов наружного}$$

барабана; здесь и далее $v_n = v_B$. Смещение l_0 соответствует частицам, скорости которых

равны наивероятной (v_n) скорости в распределении Максвелла, причем $\frac{l_0}{r} = \frac{\omega r}{v_n}$.

Введем относительное смещение

$$l_r = \frac{1}{l_0} = \frac{1}{u} \cdot (l_r)_{\max} = \sqrt{\frac{2}{5}}, \quad (3.1)$$

которому соответствует “наивероятная” скорость Штерна:

$$v_n = \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot v_{n\max} = \sqrt{\frac{5RT}{M}}, \quad (l_n = \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot l_0 = \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \frac{\sigma r^2}{v_{n\max}} = \frac{\sigma r^2}{v_n}). \quad (3.2)$$

и максимум функции Штерна:

$$(F_1)_{\max} = \frac{2}{l_0} \cdot \frac{25}{4} \sqrt{2.5} \cdot e^{-2.5} = \frac{2C}{l_0},$$

где

$$C = \frac{25}{4} \sqrt{2.5} \cdot e^{-2.5} = 0,811173617. \quad (3.3)$$

Характеристические отклонения частиц:

а) наивероятное отклонение:

$$l_n = \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot l_0 = r \cdot \frac{v_b}{\sqrt{\frac{5RT}{M}}}, \quad (3.4)$$

где $v_b = 2\pi n r$ - скорость барабана и n – число его оборотов;

б) среднее отклонение:

$$\langle l \rangle = \frac{\int l F_1 dl}{\int F_1 dl} = \sqrt{\frac{\pi}{4}} \cdot l_0 = r \cdot \frac{v_b}{\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}}; \quad (3.5)$$

в) среднеквадратичное отклонение:

$$\sqrt{\langle l^2 \rangle} = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{\pi}}} \cdot l_0 = r \cdot \frac{v_b}{\sqrt{\frac{\sqrt{\pi} RT}{M}}}. \quad (3.6)$$

“средняя скорость” частиц в распределении Штерна равна средней скорости распределения в потоке:

$$\langle v \rangle = \frac{\int_0^1 v dw}{\int_0^1 dw} = \frac{\int_0^{\infty} v F_1 dl}{\int_0^{\infty} F_1 dl} = \sqrt{\frac{9\pi RT}{8M}} = \sqrt{\frac{3.53429 RT}{M}}. \quad (3.7)$$

“Средне квадратичная скорость” в распределении Штерна:

$$v_{kv} = \sqrt{\frac{\int v^2 F_1 dl}{\int F_1 dl}} = \sqrt{\frac{\sqrt{\pi RT}}{M}}. \quad (3.8)$$

Очевидно, высота осажденного слоя H будет пропорциональна F_1

$$H_b = BF_1 = \frac{2B}{l_0} u^5 e^{-u^2} = \frac{2B}{l_0} \frac{1}{l_r^5} e^{-\frac{1}{l_r^2}}. \quad (3.9)$$

Максимальная высота H_m определяется из условия

$$H_{\max} = B(F_1)_{\max}. \quad (3.10)$$

В итоге имеем

$$B = \frac{H_{\max}}{(F_1)_{\max}} = \frac{H_{\max} l_0}{2C}. \quad (3.11)$$

Таким образом, уравнение поверхности осажденного слоя примет вид

$$H = \frac{H_{\max}}{C} \frac{1}{l_r^5} e^{-\frac{1}{l_r^2}}. \quad (3.12)$$

Вернемся к уравнению (3.13) и определим площадь сечения осажденного слоя

$$S = \int h dl = B \int \frac{2}{l_0} \frac{1}{l_r^5} e^{-\frac{1}{l_r^2}} dl = B. \quad (3.13)$$

Но $S = \frac{M_{os}}{\rho H_{os}}$, где M_{os} - масса осажденного металла и H_{os} - ширина осажденного слоя. Таким образом, получаем еще одно уравнение профиля осажденного слоя

$$H = \frac{2M_{os}}{\rho H_{os} l_0} \frac{1}{l_r^5} e^{-\frac{1}{l_r^2}}, \text{ где } l_r = \frac{1}{l_0} = \frac{1}{2\pi n r^2} \sqrt{\frac{2RT}{M}}. \quad (3.14)$$

Если барабан не вращается, профиль осажденного слоя представляется кривой Гаусса. В самом деле,

$$dw = \frac{1}{\sigma \cdot r \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{l^2}{2\sigma^2 r^2}} \cdot dl \text{ и } F_G = \frac{dw}{dl} = \frac{1}{\sigma \cdot r \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{l^2}{2\sigma^2 r^2}}. \quad (3.15)$$

Очевидно, высота осажденного слоя равна $H = AF_G$ и

$$A = \frac{H_{\max}}{1} = \sqrt{2\pi} \cdot \sigma \cdot r H_{\max} \quad (3.16)$$

$$\text{Поэтому } H = H_{\max} \cdot e^{-\frac{l^2}{2\sigma^2 r^2}}. \quad (3.17)$$

Так как

$$S = \int H dl = 2H_{\max} \int_0^{\infty} e^{-\frac{l^2}{2\sigma^2 r^2}} dl = \sqrt{2\pi} \cdot \sigma \cdot r H_{\max}, \quad (3.18)$$

$$\text{но } S = \frac{M_{os}}{\rho \cdot H_{os}} \text{ и } H_{\max} = \frac{M_{os}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma \cdot r \cdot \rho \cdot \rho_{os}}, \quad (3.19)$$

и

$$H = \frac{M_{os}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma \cdot r \cdot \rho \cdot H_{os}} e^{-\frac{l^2}{2\sigma^2 r^2}}. \quad (3.20)$$

Введем $l_0 = \sqrt{2} \cdot \sigma \cdot r$, тогда окончательно получим

$$H = \frac{M_{os}}{\sqrt{\pi} \cdot l_0 \cdot \rho \cdot H_{os}} e^{-\frac{l^2}{l_0^2}}. \quad (3.21)$$

Приложение 3.

Распределение в опыте Истермана

Принимая во внимание, что

$$l = v\Delta t, \quad l = \frac{g(\Delta t)^2}{2}, \quad l = \frac{gL^2}{2v^2} = \frac{gL^2}{2v_n^2 u^2}, \quad u = \frac{L}{v_n} \sqrt{\frac{g}{2l}}.$$

Введем стандартное смещение, соответствующее наиболее вероятной скорости Максвелла:

$$l_0 = \frac{gL^2}{2v_n^2}. \quad (4.1)$$

В таком случае

$$u^2 = \frac{gL^2}{2v_n^2 l} = \frac{1}{l_r}, \text{ где } l_r = \frac{l}{l_0} \text{ и } l_0 = \frac{gL^2}{2v_n^2} \quad (4.2)$$

Итак,

$$du = -\frac{u^3 dl_r}{2} \text{ и } dw = F_{jv} dv = 2u^3 e^{-u^2} du = -u^6 e^{-u^2} dl_r$$

Таким образом, имеем

$$F_g = -\frac{dw}{dl} = \frac{1}{l_0} u^6 e^{-u^2} = \frac{1}{l_0} \frac{1}{l_r^3} e^{-\frac{1}{l_r}}. \quad (4.3)$$

“Наивероятная” скорость в гравитационном поперечном поле, которой соответствует максимум плотности распределения, равна

$$u = \sqrt{3}, \quad v_{ng} = \sqrt{\frac{6RT}{M}}. \quad (4.4)$$

Максимум плотности распределения соответствует наивероятное смещение

$$l_n = \frac{gL^2}{2v_{vg}^2}. \quad (4.5)$$

“Наивероятная” скорость определяет максимум плотности распределения

$$(F_g)_{\max} = \frac{27}{l_0} e^{-3}. \quad (4.6)$$

“Средняя скорость” в гравитационном распределении

$$\langle u \rangle = \frac{\int u F_g dl}{\int F_g dl} = \sqrt{\frac{9\pi}{16}}, \quad \langle v \rangle_g = \sqrt{\frac{9\pi RT}{8M}} \quad (4.7)$$

равна средней скорости в потоке. Очевидно, толщина осажденного слоя равна

$$H = C_g F_g, \quad \text{где } C_g = \frac{H_{\max}}{(F_g)_{\max}} = \frac{e^3}{27} H_{\max} l_0. \quad (4.8)$$

Принимая во внимание (4.4), находим уравнение поверхности осажденного слоя:

$$H = \frac{e^3}{27} H_{\max} \frac{1}{l_r^3} e^{-\frac{1}{l_r}}. \quad (4.9)$$

Площадь сечения осажденного слоя равна:

$$S = \int_0^{\infty} H dl = C_g \int_0^{\infty} F_g dl = C_g \quad (4.10)$$

и $S = \frac{M_{os}}{\rho H_{os}}$, то уравнение осажденного слоя в гравитационном поле можно представить в

$$\text{виде: } H = \frac{M_{os}}{\rho H_{os} l_0} \frac{1}{l_r^3} e^{-\frac{1}{l_r}} \quad (4.11)$$