

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Объект авторского права  
УДК 539.4

**ЛЕ**  
**Динь Нгуен**

**ДЛИННОВОЛНОВОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ И КОЛЕБАНИЯ  
ДВУХ- И ТРЕХСЛОЙНЫХ БАЛОК И ПЛАСТИН  
С УЧЕТОМ КОНТРАСТНОСТИ УПРУГИХ СВОЙСТВ СЛОЕВ  
И ПОВЕРХНОСТНЫХ ЭФФЕКТОВ**

Автореферат диссертации  
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук  
по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Минск, 2025

Научная работа выполнена в Белорусском государственном университете.

Научный руководитель

**МИХАСЕВ Геннадий Иванович,**

доктор физико-математических наук, профессор, профессор международного центра прикладной механики, школы астронавтики, Харбинского политехнического университета, КНР

Официальные оппоненты:

**ЖУРАВКОВ Михаил Анатольевич,**

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Теоретическая и прикладная механика» Белорусского государственного университета;

**ВЕРЕМЕЙЧИК Андрей Иванович,**

кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой «Теоретическая и прикладная механика» УО «Брестский государственный технический университет»

Оппонирующая организация

Учреждение образования «Белорусский государственный университет транспорта»

Защита состоится 16 мая 2025 г. в 14<sup>00</sup> на заседании совета по защите диссертаций Д 02.05.07 при Белорусском национальном техническом университете по адресу: 220013, г. Минск, проспект Независимости, 65, корпус 1, аудитория 202. Телефон ученого секретаря +375 17 275 74 26, e-mail: Pavel.Shirvel@bntu.by.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского национального технического университета.

Автореферат разослан 15 апреля 2025 г.

Ученый секретарь совета  
по защите диссертаций Д 02.05.07  
кандидат физико-математических наук, доцент



П. И. Ширвель

© Ле Д. Н., 2025

© Белорусский национальный  
технический университет, 2025

## ВВЕДЕНИЕ

Слоистые тонкостенные упругие балки и пластины, изготовленные из различных материалов, отличающихся высокой степенью контрастности механических свойств, находят разнообразное применение в различных инженерных конструкциях и сооружениях, в транспортных средствах, а также во многих областях современной наноиндустрии. Следует заметить, что традиционные теории слоистых балок и пластинок, основанные на введении кинематических гипотез, оказываются эффективными и математически корректными, если свойства составляющих слоев различаются незначительно. Если же упругие константы различаются на порядок и более, то, как показано в ряде публикаций, использование моделей, основанных на гипотезах, может приводить к существенным погрешностям при исследовании механического поведения упругих тонкостенных слоистых тел.

Ультратонкие микро- и наноразмерные балки являются ответственными чувствительными элементами всевозможных микро- и наноэлектромеханических систем (МЭМС и НЭМС), таких как энсоры, резонаторы, атомносиловые микроскопы и других электромеханических устройств. Если толщина таких элементов измеряется в микронном и, тем более, в нанометровом диапазоне, то классические теории балок и пластин, основанные на принятии гипотез для перемещений и напряжений, становятся непригодными. Остаточные напряжения в нанопокртыии, обусловленные разными термомеханическими свойствами нанопленки и основного материала, а также остаточные поверхностные напряжения на «свободных» поверхностях, зависящие от кристаллографического направления, существенно влияют как на эффективные упругие характеристики ультратонкого упругого элемента, так и на их механическое поведение. Следует отметить, что попытки моделирования наноразмерных балок с учетом поверхностных напряжений на основе введения гипотез для перемещений и напряжений приводят к противоречивым результатам при оценке эффективных упругих характеристик. Наиболее распространенной моделью, учитывающей наличие поверхностных напряжений и инерции на «свободной» поверхности материала представляется модель поверхностной теории упругости Гуртина-Мёрдока.

Целью диссертации является разработать единый подход, основанный на асимптотическом интегрировании уравнений упругости по толщине балок и пластин и построить математико-механические модели, свободные от каких-либо гипотез, которые асимптотически корректно описывают длинноволновое деформирование и колебания двух- и трехслойных балок и пластин с контрастными свойствами, а также наноразмерных балок с учетом поверхностных эффектов в рамках поверхностной теории упругости Гуртина-Мёрдока.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### **Связь работы с научными программами, проектами и темами**

Тема соответствует приоритетным направлениям научной, научно-технической и инновационной деятельности на 2021–2025 гг., утвержденных Указом Президента Республики Беларусь № 156 от 07.05.2020 г. (пункты 1, 4) и выполнялась в рамках НИР № 1.7.01.2 «Развитие континуальных моделей наноразмерных структур

и объектов на основе двухфазной нелокальной теории упругости» (№ ГР 20212360) задания «Механико-математическое моделирование сложных природных и техногенных процессов и объектов на различных масштабных уровнях», входящего в подпрограмму «Математические модели и методы» государственной программы научных исследований «Конвергенция–2025» на 2021–2025 годы.

### **Цели, задачи, объект и предмет исследования**

*Целью настоящей работы* является установление закономерностей механического поведения двух- и трехслойных балок и пластин с высококонтрастными упругими свойствами, а также наноразмерных балок с учетом поверхностной энергии в рамках поверхностной теории упругости Гуртина-Мёрдока от упругих свойств составляющих слоев, наличия поверхностных напряжений, включая остаточные, и поверхностной инерции.

#### *Задачи исследования:*

– получить асимптотически корректные соотношения для перемещений и напряжений с учетом граничных условий на свободных и интерфейсных линиях/поверхностях с использованием асимптотического интегрирования уравнений теории упругости по толщине тонких двух- и трехслойных балок/пластин с высококонтрастными свойствами;

– вывести новые дифференциальные уравнения для асимптотически эквивалентных тонких однослойных балок/пластин, описывающие длинноволновое деформирование и динамику двух- и трехслойных балок/пластин, которые учитывают степень контрастности упругих свойств слоев, наличие поперечных сдвигов, а также внешнюю нагрузку, включая объемные силы;

– выполнить анализ влияния упругих и вязкоупругих модулей высококонтрастных материалов на нижний спектр собственных частот двух- и трехслойных балок и пластин на основе новой модели, а также альтернативных моделей, основанных на кинематических гипотезах и осреднении упругих свойств по толщине;

– получить асимптотически корректные формулы для перемещений и напряжений, удовлетворяющие уравнениям баланса сил на «свободных» поверхностях в рамках поверхностной теории упругости с использованием асимптотического интегрирования двумерных уравнений упругости по толщине ультратонкой полосы-балки;

– вывести новые одномерные дифференциальные уравнения для наноразмерной полосы-балки с учетом поверхностной энергии;

– выполнить анализ влияния поверхностных модулей упругости, остаточных поверхностных напряжений, а также кристаллографического направления на поверхностях балки, изготовленной из различных материалов, на собственные частоты нанобалки и ее критические размеры, приводящие к самопроизвольной потере устойчивости.

*Объектом исследования* являются двух- и трехслойные балки и пластины с контрастными упругими характеристиками, а также наноразмерные балки с поверхностными эффектами.

*Предмет исследования* напряженно-деформированное состояние и свободные колебания двух- и трехслойных балок и пластин с учетом контрастности упругих свойств, а также собственные частоты нанобалок с учетом поверхностной энергии и ее критические размеры, приводящие к самопроизвольной потере устойчивости.

## **Научная новизна**

Научная новизна диссертационной работы заключается в разработке новых, свободных от кинематических гипотез, математико-механических моделей, которые асимптотически корректно предсказывают длинноволновое деформирование и колебания двух- и трехслойных балок и пластин с высококонтрастными свойствами, а также низкочастотные колебания и самопроизвольную потерю устойчивости ультратонких балок с остаточными поверхностными напряжениями в рамках поверхностной теории упругости.

## **Положения, выносимые на защиту**

1. Свободные от кинематических гипотез математико-механические модели двух- и трехслойных балок и пластин с высококонтрастными упругими свойствами, включающими асимптотически корректные соотношения для полей перемещений и напряжений, удовлетворяющих граничным условиям на лицевых и интерфейсных поверхностях, а также разрешающие уравнения типа Тимошенко-Рейсснера для эквивалентных однослойных тонкостенных балок и пластин, учитывающих контрастность упругих свойств слоев и наличие сдвигов в жестком слое при длинноволновых деформациях и низкочастотных колебаниях и установленные на их основе зависимости собственных частот от геометрических и вязкоупругих характеристик составляющих слоев.

2. Свободная от гипотез математико-механическая модель ультратонкой полосы-балки, включающая асимптотически корректные соотношения для перемещений и напряжений, удовлетворяющих уравнениям баланса сил на лицевых поверхностях в рамках модели поверхностной упругости Гуртина-Мёрдока, а также разрешающее уравнение, описывающее длинноволновое деформирование и колебания с учетом напряжений и инерции на лицевых поверхностях.

3. Установленные зависимости собственных частот наноразмерных балок, изготовленных из стекла с нанесенными нанопленками железа, а также балок из алюминия, никеля и кремния с различным кристаллографическим направлением на поверхностях, от остаточных напряжений на лицевых поверхностях и высоты наноразмерной полосы-балки.

4. Установленные зависимости критической длины и ширины наноразмерной полосы-балки, изготовленной из никеля Ni[111] и кремния Si[100] с остаточными сжимающими напряжениями, приводящими к ее самопроизвольной потере устойчивости (самовыпучиванию).

## **Личный вклад соискателя ученой степени**

Представленные в работе новые научные результаты получены автором лично. Часть результатов опубликована в соавторстве. Научный руководитель Михасев Г. И. принимал участие в выборе направлений исследований, постановке задач и интерпретации всех полученных результатов [1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 12; 13]; соавтор Ботогова М. Г. принимала участие в составлении кодов в Wolfram Mathematica для расчета собственных частот по модели Григолюка-Куликова [1; 4; 6; 10], а также для определения поверхностных модулей упругости [12]; все другие расчеты в рамках новых моделей, выносимых на защиту, выполнены автором диссертации самостоятельно. Результаты, полученные соавторами, являются вспомогательными и не выносятся на защиту, либо не входят в настоящую диссертационную работу.

### **Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов**

Материалы диссертации докладывались на следующих международных и республиканских научных конференциях: IX и X Международная научно-техническая конференция – «Теоретическая и прикладная механика» (Минск, Республика Беларусь, 2023 и 2024); Международная научно-практическая конференция, посвященная 65-летию механико-математического факультета Белорусского государственного университета (Минск, Республика Беларусь, 2023); 80-я и 81-я научные конференции студентов и аспирантов Белорусского государственного университета (Минск, Республика Беларусь, 2023 и 2024); Международная научная конференция по механике «Десятые Поляховские чтения» (Санкт-Петербург, Россия, 2024); International Conference Scientific research of the SCO countries: synergy and integration (Beijing, China, 2024); Межвузовский международный конгресс – «Высшая школа: научные исследования» (Москва, Россия, 2024); International Science Conference: Science Education Practice (Delhi, India, 2025).

Полученные результаты также докладывались на семинарах кафедры био- и наномеханики механико-математического факультета Белорусского государственного университета.

Результаты, представленные в диссертационной работе, использовались при проведении фундаментальных исследований в рамках государственных программ научных исследований.

Кроме того, полученные результаты используются в учебном процессе кафедры био- и наномеханики механико-математического факультета Белорусского государственного университета. Материалы исследований включены в учебный курс лекций «Теория упругости», читаемый студентам первой ступени образования специальности 1-31 03 02 – «Механика и Математическое моделирование» на механико-математическом факультете Белорусского государственного университета для последующего применения в научно-исследовательской работе и практике при исследовании многослойных пластин, оболочек и балок с высококонтрастными механическими свойствами. Материалы исследований включены в методику расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) двухслойной пластины под действием внешней нагрузки и использованы для расчета и проектирования корпуса, крыла и деталей малоразмерного БЛА типа «Бусел-М» на УП «Научно-производственный центр многофункциональных беспилотных комплексов» Национальной академии наук.

### **Опубликованность результатов диссертации**

Основные результаты диссертации опубликованы в 13 научных работах, в том числе, в 4 статьях в рецензируемых научных журналах в соответствии с пунктом 19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республики Беларусь, в 2 статьях в других рецензируемых научных изданиях, в 6 статьях в сборнике материалов конференции и 1 тезисе докладов конференций.

### **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, 4-х глав основного текста, заключения и библиографического списка. Она изложена на 89 страницах, из которых 67 страниц содержат основной текст с рисунками, 9 страниц содержат список использованных источников и 2 страницы содержат приложения об использовании результатов исследований.

## ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В первой главе выполнен обзор литературы, посвященной существующим теориям тонких слоистых балок, пластин и оболочек, основанным на принятии гипотез для перемещений и напряжений. Сделана условная классификация данных теорий, в соответствии с которой вводятся модели упругих тонких однослойных тел, эквивалентные исходным слоистым структурам, а также теории, построенные на послойном моделировании с введением гипотез для каждого слоя. В частности, упоминаются модели, разработанные Рейсснером (Reissner E.), Миндлиным (Mindlin R.), Лурье А. И., Тимошенко (Timoshenko S. P.), Редди (Reddy J. N.), Старовойтовым Э. И. и др. Также приводятся разрешающие уравнения модели Григолюка-Куликова, которая основана на введении обобщенных кинематических гипотез Тимошенко. В качестве альтернативной модели рассмотрена модель Товстика П. Е., полученная методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений упругости по толщине с одновременным осреднением всех характеристик по толщине слоистой оболочки.

Выполнен анализ существующих подходов при моделировании ультратонких балок и пластин с учетом наличия поверхностных напряжений и инерции в рамках поверхностной теории упругости Гуртина-Мёрдока. Отмечается, что модели наноразмерных балок и пластин, построенные на основе гипотез для напряжений, приводят к противоречивым соотношениям для эффективных жесткостей на изгиб в случае наличия остаточных поверхностных напряжений.

В заключение приводятся преимущества и недостатки существующих моделей и отмечается актуальность темы диссертации, целью которой является разработка математико-механических моделей для тонких высококонтрастных балок и пластин, а также для наноразмерных балок с поверхностной энергией, которые свободны от каких либо гипотез.

Во второй главе рассматривается задача о моделировании механического поведения трехслойной упругой изотропной полосы-балки, состоящей из жестко связанных между собой упругого жесткого внутреннего слоя и внешних значительно более мягких вязкоупругих слоев, имеющих толщины  $h_k$  (рисунок 1).

Материал слоев характеризуется константами Ламе  $\lambda_j, \mu_j$  и плотностью  $\rho_j$ , где  $|\lambda_1|, |\lambda_3| \ll |\lambda_2|, |\mu_1|, |\mu_3| \ll |\mu_2|$ .

Двумерные уравнения для слоев имеют вид:

$$\frac{\partial s_{11}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial s_{12}^{(k)}}{\partial y_k} - \rho_k \frac{\partial^2 u_1^{(k)}}{\partial t^2} + f_1^{(k)} = 0, \quad \frac{\partial s_{21}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial s_{22}^{(k)}}{\partial y_k} - \rho_k \frac{\partial^2 u_2^{(k)}}{\partial t^2} + f_2^{(k)} = 0, \quad (1)$$

где  $s_{ij}^{(k)} = \lambda_k e_{ii}^{(k)} \delta_{ij} + 2\mu_k e_{ij}^{(k)}$  – компоненты тензора напряжений в  $k$ -ом слое,  $e_{ij}^{(k)}$  – линейные компоненты тензора деформаций, а  $f_1^{(k)}, f_2^{(k)}$  – компоненты объемных сил. Если есть внешние силы, действующие на лицевые поверхности, то они могут быть включены в объемные в качестве краевых дельта-функций.

Пусть  $\varepsilon = h/l$  – малый параметр, где  $h$  – общая ширина полосы, а  $l$  – ее длина или характерный размер деформации. Имея ввиду высокую контрастность упругих свойств слоев, введем следующую асимптотическую оценку для модулей упругости:

$$\frac{E'_m}{E_2} = \varepsilon^2 c_m, \quad c_m \sim 1, \quad E'_m = ReE_m, \quad m = 1, 3. \quad (2)$$

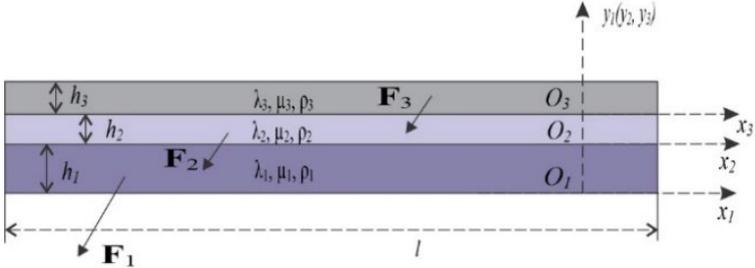


Рисунок 1 – Трехслойная полоса-балка под действием объемных сил; системы координат

Перейдем к безразмерным переменным по формулам:

$$x = l\xi, \quad y_k = h_k z_k, \quad \{u_1^{(k)}, u_2^{(k)}\} = h \{u^{(k)}, w^{(k)}\}, \quad (3)$$

$$s_{ij}^{(k)} = E'_k \sigma_{ij}^{(k)}, \quad f_2^{(k)} = \frac{E'_k}{h_k} \hat{f}_2^{(k)}, \quad f_1^{(k)} = \frac{\varepsilon E'_k}{h_k} \hat{f}_1^{(k)}, \quad i, j, k = 1, 2.$$

Для исследования длинноволновой изгибной деформации принимаем следующие асимптотические оценки:

$$w^{(k)} = \varepsilon^{-4} W^{(k)}, \quad u^{(k)} = \varepsilon^{-3} U^{(k)}, \quad \sigma_{12}^{(k)} = \varepsilon^{-1} \tau^{(k)}, \quad \sigma_{22}^{(k)} = \sigma^{(k)}. \quad (4)$$

Уравнения (1), с учетом закона Гука и деформационных соотношений принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W^{(k)}}{\partial z} &= -\varepsilon^2 \kappa_k c_v^{(k)} \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \xi} + \varepsilon^4 \kappa_k c_3^{(k)} \sigma^{(k)}, \quad \frac{\partial U^{(k)}}{\partial z} = -\kappa_k \frac{\partial W^{(k)}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \kappa_k c_g^{(k)} \tau^{(k)}, \\ \frac{\partial \tau^{(k)}}{\partial z} &= -\kappa_k c_0^{(k)} \frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial \xi^2} - \varepsilon^2 \kappa_k c_v^{(k)} \frac{\partial \sigma^{(k)}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \eta_k \frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial t^2} - \varepsilon^2 \hat{f}_1^{(k)}, \\ \frac{\partial \sigma^{(k)}}{\partial z} &= -\kappa_k \frac{\partial \tau^{(k)}}{\partial \xi} + \eta_k \frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial t^2} - \hat{f}_2^{(k)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\kappa_k = h_k / h$ ,  $c_0^{(k)}$ ,  $c_g^{(k)}$ ,  $c_v^{(k)}$ ,  $c_3^{(k)}$   $\eta_k$  – безразмерные константы, зависящие от свойств слоев.

Граничные условия на лицевых поверхностях однородные:

$$\tau^{(1)}\Big|_{z=0} = \sigma^{(1)}\Big|_{z=0} = 0, \tau^{(3)}\Big|_{z=1} = \sigma^{(3)}\Big|_{z=1} = 0. \quad (6)$$

На интерфейсных линиях условия жесткого контакта имеют вид:

$$W^{(1)}\Big|_{z=1} = W^{(2)}\Big|_{z=0}, U^{(1)}\Big|_{z=1} = U^{(2)}\Big|_{z=0}, W^{(2)}\Big|_{z=1} = W^{(3)}\Big|_{z=0}, U^{(2)}\Big|_{z=1} = U^{(3)}\Big|_{z=0}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \tau^{(2)}\Big|_{z=0} &= \varepsilon^2 \zeta_1 \tau^{(1)}\Big|_{z=1}, \sigma^{(2)}\Big|_{z=0} = \varepsilon^2 \zeta_1 \sigma^{(1)}\Big|_{z=1}, \tau^{(2)}\Big|_{z=1} = \varepsilon^2 \zeta_3 \tau^{(3)}\Big|_{z=0}, \\ \sigma^{(2)}\Big|_{z=1} &= \varepsilon^2 \zeta_3 \sigma^{(3)}\Big|_{z=0}. \end{aligned} \quad (8)$$

Имеем краевую задачу (5)–(8), которую можно решать методом асимптотического интегрирования. Все неизвестные функции ищем в виде асимптотического ряда:

$$Z^{(k)} = z_0^{(k)} + \varepsilon^2 z_2^{(k)} + \dots, \quad k = 1, 2, 3, \quad (9)$$

где  $Z^{(k)}$  – любые из неизвестных функций, входящих в уравнения (5). Подстановка (9) в (5)–(8) приводит к последовательности краевых задач относительно  $z_i^{(k)}$ .

Решение задач в главном (нулевом) приближении имеет вид:

$$\begin{aligned} w_0^{(k)} &= w_0(\xi, t), u_0^{(1)} = -\frac{1}{2} [2\kappa_1(z-1) - \kappa_2] \frac{\partial w_0}{\partial \xi}, u_0^{(2)} = -\frac{1}{2} \kappa_2 (2z-1) \frac{\partial w_0}{\partial \xi}, \\ u_0^{(3)} &= -\frac{1}{2} (2\kappa_3 z + \kappa_2) \frac{\partial w_0}{\partial \xi}, \tau_0^{(1)} = \frac{1}{2} c_0^{(1)} \kappa_1 [\kappa_1 z^2 - (2\kappa_1 + \kappa_2) z] \frac{\partial^3 w_0}{\partial \xi^3}, \\ \tau_0^{(2)} &= \frac{1}{2} c_0^{(2)} \kappa_2 (z^2 - z) \frac{\partial^3 w_0}{\partial \xi^3}, \tau_0^{(3)} = \frac{1}{2} c_0^{(3)} \kappa_3 [\kappa_3 z^2 + \kappa_2 z - \kappa_2 - \kappa_3] \frac{\partial^3 w_0}{\partial \xi^3}, \\ \sigma_0^{(1)} &= -\frac{1}{12} c_0^{(1)} \kappa_1^2 [2\kappa_1 z^3 - 3(2\kappa_1 + \kappa_2) z^2] \frac{\partial^4 w_0}{\partial \xi^4} + \eta_1 z \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - F_2^{(1)}, \\ \sigma_0^{(2)} &= -\frac{1}{12} c_0^{(2)} \kappa_2^3 (2z^3 - 3z^2) \frac{\partial^4 w_0}{\partial \xi^4} + \eta_2 z \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - F_2^{(2)}, \\ \sigma_0^{(3)} &= -\frac{1}{12} c_0^{(3)} \kappa_3^2 [2\kappa_3 z^3 + 3\kappa_2 z^2 - 6(\kappa_3 + \kappa_2) z + 4\kappa_3 + 3\kappa_2] \frac{\partial^4 w_0}{\partial \xi^4} + \\ &\quad + \eta_1 (z-1) \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + F_2^{(3)}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $F_2^{(k)}$  – приведенные силы, зависящие от  $f_2^{(k)}$ , а  $w_0(x, t)$  находится из уравнения типа Бернулли-Эйлера:

$$\frac{1}{12} c_0^{(2)} \kappa_2^2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial \xi^4} + \eta_2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = F_2^{(2)}(\xi, 1). \quad (11)$$

Решение возникающих краевых задач в следующем приближении дает следующие:

1) *поправки к перемещениям:*

$$\begin{aligned} w_2^{(1)} &= \frac{1}{2} c_v^{(1)} \kappa_1 \left[ \kappa_1 z^2 - (2\kappa_1 + \kappa_2) z + \kappa_1 + \kappa_2 \right] \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2} + w_{20}(\xi, t), \\ w_2^{(2)} &= \frac{1}{2} c_v^{(2)} \kappa_2^2 (z^2 - z) \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2} + w_{20}(\xi, t), \\ w_2^{(3)} &= \frac{1}{2} c_v^{(3)} \kappa_3 (\kappa_3 z^2 + \kappa_2 z) \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2} + w_{20}(\xi, t), \\ u_2^{(1)} &= \frac{1}{12} \kappa_1^2 \left\{ c_4^{(1)} \left[ 2\kappa_1 z^3 - 3(2\kappa_1 + \kappa_2) z^2 \right] - 6c_v^{(1)} (\kappa_1 + \kappa_2) z + \right. \\ &+ c_4^{(1)} (4\kappa_1 + 3\kappa_2) + 6c_v^{(1)} (\kappa_1 + \kappa_2) \left. \right\} \frac{\partial^3 w_0}{\partial \xi^3} - \kappa_1 (z-1) \frac{\partial w_{20}}{\partial \xi} + u_{20}(\xi, t), \\ u_2^{(2)} &= \frac{1}{12} c_4^{(2)} \kappa_2^3 (2z^3 - 3z^2) \frac{\partial^3 w_0}{\partial \xi^3} - \kappa_2 z \frac{\partial w_{20}}{\partial \xi} + u_{20}(\xi, t), \\ u_2^{(3)} &= \frac{1}{12} \kappa_3^2 \left\{ c_4^{(3)} (2\kappa_3 z^3 + 3\kappa_2 z^2) - 6c_0^{(3)} c_g^{(3)} (\kappa_3 + \kappa_2) z - c_4^{(2)} \right\} \frac{\partial^3 w_0}{\partial \xi^3} - \\ &- (\kappa_3 z + \kappa_2) \frac{\partial w_{20}}{\partial \xi} + u_{20}(\xi, t); \end{aligned} \quad (12)$$

2) *поправки для напряжения сдвига в среднем жестком слое:*

$$\begin{aligned} \tau_2^{(2)} &= -\frac{1}{12} c_0^{(2)} \kappa_2^4 (z^4 - 2z^3 + z) \frac{\partial^5 w_0}{\partial \xi^5} - \frac{1}{2} [\zeta_1 c_0^{(2)} \kappa_1 (\kappa_2 + \kappa_1) (1-z) + \\ &+ \zeta_3 c_0^{(3)} \kappa_3 (\kappa_2 + \kappa_3) z] \frac{\partial^3 w_0}{\partial \xi^3} - \frac{1}{4} \eta_2 c_0^{(2)} c_g^{(2)} \kappa_2 (z^2 - z) \frac{\partial^3 w_0}{\partial \xi \partial t^2} + \\ &+ \frac{1}{2} c_0^{(2)} \kappa_2^2 (z^2 - z) \frac{\partial^3 w_{20}}{\partial \xi^3} + \int_0^z G^{(2)}(\xi, z) dz - z \int_0^1 G^{(2)}(\xi, z) dz; \end{aligned} \quad (13)$$

3) *поправку к нормальному напряжению в среднем жестком слое:*

$$\begin{aligned} \sigma_2^{(2)} &= -\frac{1}{120} c_0^{(2)} \kappa_2^5 (2z^5 - 5z^4 + 5z^2) \frac{\partial^6 w_0}{\partial \xi^6} + \frac{1}{4} \kappa_2 \left\{ [\zeta_3 c_0^{(3)} \kappa_3 (\kappa_2 + \kappa_3) - \right. \\ &\left. - \zeta_1 c_0^{(1)} \kappa_1 (\kappa_1 + \kappa_2)] z^2 + 2\zeta_1 c_0^{(1)} \kappa_1 (\kappa_2 + \kappa_1) z \right\} \frac{\partial^4 w_0}{\partial \xi^4} + \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{12} \eta_2 c_6^{(2)} \kappa_2^2 (2z^3 - 3z^2) \frac{\partial^4 w_0}{\partial \xi^2 \partial t^2} - \frac{1}{12} c_0^{(2)} \kappa_2^3 (2z^3 - 3z^2) \frac{\partial^4 w_0}{\partial \xi^4} + \eta_2 z \frac{\partial^2 w_{20}}{\partial t^2} - \\
& - \kappa_2 \int_0^z \int_0^z G^{(2)}(\xi, z) dz + \frac{1}{2} \kappa_2 z^2 \int_0^1 G^{(2)}(\xi, z) dz + \sigma_{20}^{(2)}(\xi, t),
\end{aligned}$$

где функция  $w_{20}$  находится из уравнения:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{12} c_0^{(2)} \kappa_2^{(3)} \frac{\partial^4 w_{20}}{\partial \xi^4} + \eta_2 \frac{\partial^2 w_{20}}{\partial t^2} = - \frac{1}{60} c_0^{(2)} \kappa_2^{(5)} \frac{\partial^6 w_0}{\partial \xi^6} - \\
& - \frac{1}{12} \left[ c_0^{(1)} \varsigma_1 \kappa_1 \left( 4\kappa_1^{(2)} + 6\kappa_1 \kappa_2 + 3\kappa_2^2 \right) + c_0^{(3)} \varsigma_3 \kappa_3 \left( 4\kappa_3^2 + 6\kappa_3 \kappa_2 + 3\kappa_2^2 \right) \right] \frac{\partial^4 w_0}{\partial \xi^4} + \\
& + \frac{1}{12} \eta_2 c_6^{(2)} \kappa_2^2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial \xi^2 \partial t^2} - (\varsigma_1 \eta_1 + \varsigma_3 \eta_3) \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + \Phi(\xi).
\end{aligned} \quad (15)$$

Эквивалентное уравнение однослойной балки. Введем перемещение на интерфейсных линиях:

$$w^0(\xi, t) = w_0^2(\xi, t) + \varepsilon^2 w_{20}(\xi, t) + O(\varepsilon^4). \quad (16)$$

Тогда, учитывая (11) и (15), и переходя к исходным размерным величинам, приходим к уравнению:

$$I_r \frac{\partial^4 u_2^0}{\partial x^4} + J_r \frac{\partial^4 u_2^0}{\partial t^2} = E_2 F(x/l), \quad (17)$$

где  $u_2^0$  – поперечное перемещение опорной поверхности среднего слоя,  $I_r$  – эффективная размерная изгибная жесткость и  $J_r$  – оператор модифицированной поперечной инерции, определяемые по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
I_r &= \frac{1}{12} \left[ \frac{E_2 h_2^3}{1 - \nu_2^2} + \frac{E_1 h_1}{1 - \nu_1^2} \left( 4h_1^2 + 6h_1 h_2 + 3h_2^2 \right) + \frac{E_3 h_3}{1 - \nu_3^2} \left( 4h_3^2 + 6h_3 h_2 + 3h_2^2 \right) \right], \\
J_r &= \sum_{k=1}^3 \rho_k h_k - \rho_2 h_2^3 \left[ \frac{1}{5} + \frac{1 + \nu_2}{12(1 - \nu_2)} \right] \frac{\partial^2}{\partial x^2}.
\end{aligned} \quad (18)$$

Уравнение (17) является новым, оно учитывает сдвиговые эффекты в жестком слое, соответствует модели типа Тимошенко-Рейсснора и описывает изгибную реакцию однослойной полосы-балки, эквивалентную рассматриваемой трехслойной полосе-балке с высококонтрастными свойствами.

В качестве примера рассмотрены собственные колебания трехслойной балки длиной  $l = 1$  м с фиксированной общей толщиной  $h = h_1 + h_2 + h_3 = 0,1$  м и с шарнирно опертыми краями, для которой получена формула для собственных частот с  $n$  числом полуволн:

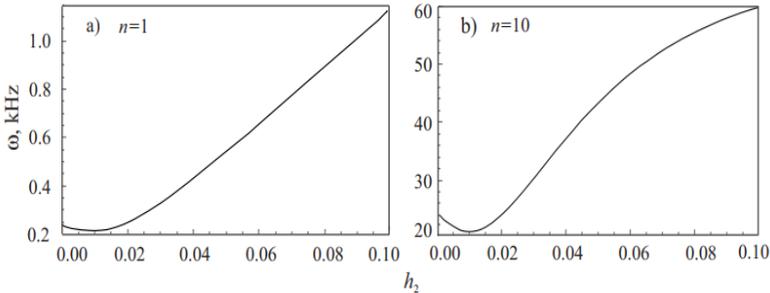
$$\omega = \frac{(\pi n)^2 I_r^{1/2}}{l^2 \sqrt{\sum_{k=1}^3 \rho_k h_k + \rho_2 h_2^3 \left[ \frac{1}{5} + \frac{1 + \nu_2}{12(1 - \nu_2)} \right] \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (19)$$

Механические свойства среднего и внешних слоев соответствуют стали и ABS-пластику SD-0170, соответственно. Входные механические параметры следующие:

$$E_2 = 200 \text{ GPa}, \rho_2 = 7,8 \text{ g/cm}^3, \nu_2 = 0,3;$$

$$E_1 = E_3 = 1,5 \text{ GPa}, \rho_1 = \rho_3 = 1,4 \text{ g/cm}^3, \nu_1 = \nu_3 = 0,4.$$

Расчеты проводились для балок с одинаковой толщиной внешних слоев  $h_1 = h_3$  и толщиной среднего слоя  $h_2$ , изменяющейся от 0 до 0,1 м. Рисунок 2 показывает, что присоединение мягких слоев и увеличение их толщины в первую очередь приводит к уменьшению всех собственных частот, при этом существует такое значение толщины среднего слоя  $h_2$ , при котором собственная частота  $\omega$  имеет минимум.



*a* – число полуволн  $n = 1$ ; *b* – количество полуволн  $n = 10$

**Рисунок 2 – Собственные частоты трехслойной балки – полосы с механическими свойствами стали и ABS-plastic SD-0170 при  $h_2$  изменяется от 0 до 0,1 м**

**В третьей главе** рассматривается задача о длинноволновом деформировании изотропных двух- и трехслойных пластин с контрастными упругими характеристиками. Упругие/вязкоупругие слои с толщинами  $h_k$  характеризуются параметрами Ламе  $\lambda_k, \mu_k$  и плотностью материала  $\rho_k$ , где  $k = 1, 2, 3$ . Здесь и ниже индексами  $k = 1, 3$  отмечены внешние «мягкие» (в общем случае, вязкоупругие) слои, а индексом  $k = 2$  – внутренний «жесткий» слой, для которого  $\lambda_2, \mu_2 \gg Re\lambda_j, Re\mu_j, j = 1, 3$ . Пусть  $\varepsilon = h/L$  – малый параметр,  $E_j/E_2 = \varepsilon^2 \zeta_j$ ,  $\zeta_j \sim 1$ , где  $E_j$  – модули Юнга внешних слоев (или их вещественные части для вязкоупругого материала). Обозначим через  $v_n^{(k)}$  компоненты вектора перемещений точек  $k$ -го слоя в плоскости, где  $n = 1, 2$ , а через  $v_3^{(k)}$  – нормальные перемещения. Пусть  $s_{lm}^{(k)}$  – компоненты тензора напряжений в  $k$ -ом слое.

Введем безразмерные перемещения и напряжения и масштабируем их:

$$\left\{ u_n^{(k)}, v_3^{(k)}, s_{n3}^{(k)}, s_{33}^{(k)} \right\} = \left\{ \varepsilon^{-3} h u_n^{(k)}, \varepsilon^{-4} h w^{(k)}, \varepsilon^{-1} E_k \tau_n^{(k)}, E_k \sigma^{(k)} \right\}. \quad (20)$$

Тогда трехмерные уравнения теории упругости для всех слоев принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^{(k)}}{\partial \zeta_k} &= -\varepsilon^2 \kappa_k c_v^{(k)} \sum_n u_{n,n}^{(k)} + \varepsilon^4 \kappa_k c_3^{(k)} \sigma^{(k)}, \quad \frac{\partial u_n^{(k)}}{\partial \zeta_k} = -\kappa_k w_n^{(k)} + \varepsilon^2 \kappa_k \bar{\mu}_k^{-1} \tau_n^{(k)}, \\ \frac{\partial \tau_n^{(k)}}{\partial \zeta_k} &= -\kappa_k \left[ c_0^{(k)} u_{n,mm}^{(k)} + \bar{\mu}_k \left( u_{n,mm}^{(k)} + c_0^{(k)} \right) u_{n,mm}^{(k)} + u_{n,mm}^{(k)} \right] - \\ &\quad - \varepsilon^2 \left( \kappa_k c_v^{(k)} \sigma_{,n}^{(k)} - \frac{\varepsilon^2}{\omega_k^2} \frac{\partial^2 u_n^{(k)}}{\partial t^2} \right), \\ \frac{\partial \sigma^{(k)}}{\partial \zeta_k} &= -\kappa_k \sum_n \tau_{,n}^{(k)} + \frac{1}{\omega_k^2} \frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial t^2}, \quad k=1,2,3; m=1,2; n \neq m, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $\kappa_k = h_k / h$ ;  $\eta_k = \omega_k^{-1} = \varepsilon^{-4} h E_k^{-1} \rho_k h_k$ ; а  $c_0^k, c_v^k, c_3^k, c_6^k, \mu_k$  – безразмерные константы.

Мягкие слои считаем свободными от нагрузки, тогда граничные условия на этих поверхностях являются однородными:

$$\tau_n^{(1)} \Big|_{\zeta_1=0} = \sigma^{(1)} \Big|_{\zeta_1=0} = 0, \quad \tau_n^{(3)} \Big|_{\zeta_3=0} = \sigma^{(3)} \Big|_{\zeta_3=0} = 0, \quad n=1,2. \quad (22)$$

Условия жесткого контакта на интерфейсных поверхностях имеют вид:

$$u_n^{(1)} \Big|_{\zeta_1=1} = u_n^{(2)} \Big|_{\zeta_2=0}, \quad w^{(1)} \Big|_{\zeta_1=1} = w^{(2)} \Big|_{\zeta_2=0}, \quad u_n^{(2)} \Big|_{\zeta_2=1} = u_n^{(3)} \Big|_{\zeta_3=0}, \quad w^{(2)} \Big|_{\zeta_2=1} = w^{(3)} \Big|_{\zeta_3=0}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \tau_n^{(2)} \Big|_{\zeta_2=0} &= \varepsilon^2 \zeta_1 \tau_n^{(1)} \Big|_{\zeta_1=1}, \quad \tau_n^{(2)} \Big|_{\zeta_2=1} = \varepsilon^2 \zeta_3 \tau_n^{(3)} \Big|_{\zeta_3=0}, \\ \sigma^{(2)} \Big|_{\zeta_2=0} &= \varepsilon^2 \zeta_1 \sigma^{(2)} \Big|_{\zeta_1=1}, \quad \sigma^{(2)} \Big|_{\zeta_2=1} = \varepsilon^2 \zeta_3 \sigma^{(3)} \Big|_{\zeta_3=0}, \quad n=1,2. \end{aligned} \quad (24)$$

Пришли к краевой задаче (21)–(24). Методика ее решения такая же как и для трехслойной балки. Все неизвестные функции ищем в виде асимптотических рядов (9).

Рассматривая задачу в главном приближении, находим:

$$\begin{aligned} w_0^{(k)} &= w_0(\xi_1, \xi_2, t), \quad k=1,2,3, \quad u_{n0}^{(3)} = -\frac{1}{2}(2\kappa_3 z + \kappa_2) \frac{\partial w_0}{\partial \xi_n}, \\ u_{n0}^{(1)} &= -\frac{1}{2} [2\kappa_1(z-1) - \kappa_2] \frac{\partial w_0}{\partial \xi_n}, \quad u_{n0}^{(2)} = -\frac{1}{2} \kappa_2 (2z-1) \frac{\partial w_0}{\partial \xi_n}, \\ \tau_{n0}^{(2)} &= \frac{1}{2} c_0^{(2)} \kappa_2^2 (z^2 - z) \frac{\partial}{\partial \xi_n} \Delta w_0, \quad \tau_{n0}^{(1)} = \frac{1}{2} c_0^{(1)} \kappa_1 [ \kappa_1 z^2 - (2\kappa_1 + \kappa_2) z ] \frac{\partial}{\partial \xi_n} \Delta w_0, \end{aligned}$$

$$\tau_{n0}^{(3)} = \frac{1}{2} c_0^{(3)} \kappa_3 \left[ \kappa_3 z^2 + \kappa_2 z - \kappa_2 - \kappa_3 \right] \frac{\partial}{\partial \xi_n} \Delta w_0, \quad n = 1, 2, \quad (25)$$

$$\sigma_0^{(1)} = -\frac{1}{12} c_0^{(1)} \kappa_1^2 \left[ 2\kappa_1 z^3 - 3(2\kappa_1 + \kappa_2) z^2 \right] \Delta^2 w_0 + \frac{z}{\omega_1^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2},$$

$$\sigma_0^{(2)} = -\frac{1}{12} c_0^{(2)} \kappa_2^3 \left( 2z^3 - 3z^2 \right) \Delta^2 w_0 + \frac{z}{\omega_2^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2},$$

$$\sigma_0^{(3)} = -\frac{c_0^{(3)}}{12} \kappa_3^2 \left[ 2\kappa_3 z^3 + 3\kappa_2 z^2 - 6(\kappa_2 + \kappa_3) z + 4\kappa_3 + 3\kappa_2 \right] \Delta^2 w_0 + \frac{z-1}{\omega_3^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2},$$

где функция  $w_0$  определяется из однородного дифференциального уравнения:

$$\frac{1}{12} c_0^{(2)} \kappa_2^3 \Delta^2 w_0 + \frac{1}{\omega_2^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = 0, \quad (26)$$

которое описывает свободные колебания среднего «жесткого» слоя без присоединенных «мягких» слоев.

Рассматривая краевую задачу (21)–(24) в следующем приближении, находим поправки ко всем перемещениям и напряжениям. В частности, для жесткого слоя получаем:

1) для *перемещений*:

$$w_2^{(2)} = \frac{1}{2} c_v^{(2)} \kappa_2^2 \left( z^2 - z \right) \Delta w_0 + w_{20}(\xi, t), \quad (27)$$

$$u_{n2}^{(2)} = \frac{1}{12} c_4^{(2)} \kappa_2^3 \left( 2z^3 - 3z^2 \right) \frac{\partial \Delta w_0}{\partial \xi_n} - \kappa_2 z \frac{\partial w_{20}}{\partial \xi} + r_{n2}(\xi, t);$$

2) для *касательных компонент тензора напряжений*:

$$\tau_{n2}^{(2)} = -\frac{1}{12} c_0^{(2)} \kappa_2^4 \left( z^4 - 2z^3 + z \right) \frac{\partial \Delta^2 w_0}{\partial \xi_n} - \frac{1}{2} \left[ \zeta_1 c_0^{(1)} \kappa_1 (\kappa_2 + \kappa_1) (1-z) + \right. \\ \left. + \zeta_3 c_0^{(3)} \kappa_3 (\kappa_2 + \kappa_3) z \right] \frac{\partial \Delta w_0}{\partial \xi_n} - \frac{1}{4} \eta_2 c_0^{(2)} c_g^{(2)} \kappa_2 \left( z^2 - z \right) \frac{\partial^3 w_0}{\partial \xi_n \partial t^2} + \\ \left. + \frac{1}{2} c_0^{(2)} \kappa_2^2 \left( z^2 - z \right) \frac{\partial \Delta w_{20}}{\partial \xi_n}, \quad (28)$$

где функция  $w_{20}$  определяется из уравнения:

$$\frac{1}{12} c_0^{(2)} \kappa_2^3 \Delta^2 w_{20} + \eta_2 \frac{\partial^2 w_{20}}{\partial t^2} = -\frac{1}{60} c_0^{(2)} \kappa_2^{(5)} \Delta^3 w_0 - \\ -\frac{1}{12} \left[ c_0^{(1)} \zeta_1 \kappa_1 \left( 4\kappa_1^2 + 6\kappa_1 \kappa_2 + 3\kappa_2^2 \right) + \right. \quad (29)$$

$$+c_0^{(3)}\zeta_3\kappa_3\left(4\kappa_3^2+6\kappa_3\kappa_2+3\kappa_2^2\right)\Delta^2w_0+\frac{1}{12}\eta_2c_6^{(2)}\kappa_2^2\frac{\partial^2\Delta w_0}{\partial t^2}-\left(\zeta_1\eta_1+\zeta_3\eta_3\right)\frac{\partial^2w_0}{\partial t^2}.$$

Подобно тому, как это было сделано в Главе 2, выведено новое уравнение для эквивалентной однослойной пластины, которое в безразмерной форме имеет вид:

$$D_r\Delta^2w^o+J_r\frac{\partial^2w^o}{\partial t^2}+O\left(\varepsilon^4\right)=0, \quad (30)$$

где  $D_r$  – эффективная цилиндрическая жесткость эквивалентной однослойной пластины, определяет по формуле:

$$D_r=\frac{1}{12}\left\{c_0^{(2)}\kappa_2^{(3)}+\varepsilon^2\left[c_0^{(1)}\zeta_1\kappa_1\left(4\kappa_1^2+6\kappa_1\kappa_2+3\kappa_2^2\right)+c_0^{(3)}\zeta_3\kappa_3\left(4\kappa_3^2+6\kappa_3\kappa_2+3\kappa_2^2\right)\right]\right\},$$

а  $J_r$  – модифицированный оператор инерции, по формуле:

$$J_r=\frac{1}{\omega_2^2}+\varepsilon^2\left[\frac{\zeta_1}{\omega_1^2}+\frac{\zeta_3}{\omega_3^2}-\frac{\kappa_2^2}{\omega_2^2}\left(\frac{1}{5}+\frac{c_6^{(2)}}{12}\right)\Delta\right].$$

Уравнение (30) соответствует модели типа Тимошенко-Рейснера третьего порядка, которая учитывает сдвиги в среднем слое и свойства присоединенных «мягких» слоев. В частном случае, при  $\kappa_3=0$ , уравнение (30) вырождается в уравнение для двухслойной пластины с высококонтрастными свойствами.

На примере свободных колебаний квадратных шарнирно-опертых двух- и трехслойных пластин, выполнен сравнительный анализ трех моделей: модели Григोलюка-Куликова (модель I), модели Товстика (модель II) и новой модели (модель III), описываемой уравнением (30). В Таблице 1 приведены собственные частоты  $\Omega$  с  $n$  и  $m$  числом полуволн для пластины со сторонами  $L_1=L_2=1$  м, у которой первый слой толщиной  $h_1=0,5$  мм выполнен из ABS-пластика SD-0170 с параметрами  $E_1=1,5*10^3$  МПа;  $\nu_1=0,4$ ;  $\rho_1=1,4*10^3$  кг/м<sup>3</sup>, а второй слой толщиной  $h_2=10$  мм изготовлен из вязкоупругого магнитореологического эластомера (МРЭ), свойства которого сильно зависят от индукции приложенного магнитного поля. В диссертации приведены экспериментально установленные в литературе зависимости модулей накопления и потерь от индукции магнитного поля  $B$ . Отметим, в частности, что с ростом индукции  $B$  от 0 до 800 мТл, модуль накопления (вещественная часть модуля сдвига композита) растет от 80 кПа и достигает максимума 3200 кПа при  $B=1000$  мТл. В скобках в процентах указано относительное расхождение частоты, найденной по модели I или II по сравнению с новой моделью III. Как видно, расхождения результатов, предсказываемых новой моделью и моделью I, основанной на обобщенных гипотезах Тимошенко, велика при малых значениях индукции, при которых слои отличаются высокой контрастностью упругих свойств. С ростом индукции и номера моды данные расхождения уменьшаются. Что касается сравнения моделей II и III, то здесь имеет место обратный эффект: с увеличением индукции и числа полуволн расхождения растут. Данный эффект может быть объяснен тем, что мо-

дель II основана на интегрировании уравнений упругости с одновременным осреднением всех упругих характеристик, включая модули сдвига слоев, кото-рые сильно влияют на высшие моды.

Аналогичные расчеты, выполненные для трехслойной пластины в случае полной симметрии геометрии и вязкоупругих свойств внешних мягких слоев относительно сре-динной поверхности внутреннего жесткого слоя, показали хорошее совпадение частот, найденных по трем моделям в широком диапазоне изменения магнитной индукции и номера моды.

Выполненный сравнительный анализ моделей показал, что в случае отсутствия симметрии в распределении мягкого и жесткого слоев относительно приведенной поверхности и, в частности, для двухслойной высококонтрастной пластины, пред-почтение следует отдавать модели III, которая свободна от гипотез и осреднения вязкоупругих свойств по толщине (таблица 1).

**Таблица 1 – Собственная частота  $\omega = \Re\Omega$  (Гц) двухслойной пластины с МРЭ-слоем как функция индукции  $B$  (мТл) магнитного поля для мод с  $n = 1$  и разными  $m$**

$B$	100	200	400	600	800
$m$					
модель I					
$m=1$	6.101 (4,3 %)	7.349 (2,9 %)	7.578 (2,7 %)	7.574 (2,7 %)	7.573
$m=3$	30.383 (3,9 %)	36.591 (2,5 %)	37.730 (2,2 %)	37.712 (2,2 %)	37.706
$m=5$	78.359 (3,0 %)	94.354 (1,7 %)	97.290 (1,4 %)	97.243 (1,4 %)	97.229
$m=10$	293.586(0,6 %)	353.229(2,0 %)	364.204(2,3 %)	364.031(2,3 %)	363.982
модель II					
$m=1$	5.689 (2,8 %)	6.856 (4,0 %)	7.070 (4,2 %)	7.066 (4,2 %)	7.065
$m=3$	28.303 (3,3 %)	34.109 (4,4 %)	35.175 (4,7 %)	35.158 (4,7 %)	35.153
$m=5$	72.856 (4,2 %)	87.820 (5,4 %)	90.570 (5,6 %)	90.526 (5,6 %)	90.514
$m=10$	270.732(8,4 %)	326.653(9,4 %)	336.952(9,6 %)	336.791(9,6 %)	336.745
модель III					
$m=1$	5.851	7.139	7.381	7.378	7.377
$m=3$	29.255	35.693	36.904	36.888	36.884
$m=5$	76.063	92.801	95.951	95.909	95.898
$m=10$	295.476	360.495	372.731	372.571	372.526

**В четвертой главе** предлагается модель, предсказывающая длинноволновое деформирование ультратонкой полосы-балки толщиной  $h$  с учетом поверхностных эффектов. В рамках теории упругости Гуртина-Мёрдока упругие свойства на свободных поверхностях определяются поверхностными упругими константами Ламе  $\lambda_0^\pm, \mu_0^\pm$  и поверхностными плотностями  $\rho_0^\pm$ , а также предполагается наличие остаточных поверхностных напряжений  $s_0^\pm$ , где знаки  $-$  и  $+$  соответствуют величинам на нижней и верхней поверхностях балки, В общем случае на полосу-балку действуют поверхностные силы  $Q^\pm = (q_1^\pm, q_2^\pm, 0)$ . Введем вектор перемещения  $U = \{U_1, U_2, 0\}$ . Тогда уравнения движения упругой изотропной полосы-балки можно записать в виде:

$$\hat{\sigma}_{y,j} - \rho \ddot{U}_i = 0, \quad i=1,2. \quad (31)$$

В соответствии с теорией поверхностной упругости Гуртина-Мёрдока, поверхностные напряжения определяются как:

$$s_{11}^{\pm} = s_0^{\pm} + U_{1,1}^{\pm} (\lambda_0^{\pm} + 2\mu_0^{\pm}), s_{12}^{\pm} = s_0^{\pm} U_{2,1}^{\pm}, \quad (32)$$

а уравнения баланса сил на лицевых поверхностях (при  $x_2 = h$  и  $x_2 = 0$ ) имеют вид:

$$\sigma_{12}^{\pm} = \pm s_{11,1}^{\pm} \pm \rho_0^{\pm} U_1^{\pm} + q_1^{\pm}, \quad \sigma_{22}^{\pm} = \pm s_{12,1}^{\pm} \pm \rho_0^{\pm} U_2^{\pm} + q_2^{\pm}. \quad (33)$$

Введем безразмерный малый параметр  $\varepsilon = h/L$ , где  $L$  – характерный размер деформации или длина балки, а также следующие асимптотические оценки:

$$\frac{\lambda_0^{\pm} + 2\mu_0^{\pm}}{EL} = \varepsilon^{\alpha_1} \kappa_1^{\pm}, \quad \frac{s_0^{\pm}}{El} = \varepsilon^{\alpha_2} \kappa_2^{\pm}, \quad \frac{\rho_0^{\pm}}{\rho L} = \varepsilon^{\alpha_3} \kappa_3^{\pm}, \quad \alpha_k > 0; \kappa_k \sim 1. \quad (34)$$

В зависимости от материала и геометрических размеров, возможны различные значения  $\alpha_k$ . Далее рассмотрен случай  $\alpha_k = 3$ , который имеет место для многих рассмотренных в диссертации материалов.

Введем безразмерные величины по формулам:

$$\{x_1, x_2, \hat{t}\} = \{lx, hy, \omega_*^{-1} t\}, \quad \omega_*^2 = \frac{\varepsilon^4 E}{h^4 \rho}, \quad q_1^{\pm} = \varepsilon ES^{\pm}, \quad q_2^{\pm} = Eq^{\pm},$$

$$\{U_1, U_2\} = h \{\varepsilon^{-3} u, \varepsilon^{-4} w\}, \quad \{\sigma_{12}, \sigma_{22}\} = E \{\varepsilon^{-1} \tau, \sigma\}.$$

Тогда уравнения движения запишутся в виде:

$$w_{,y} = -\varepsilon^2 c_0 u_{,xx} + \varepsilon^4 c_3 \sigma, \quad u_{,y} = -w_{,x} + \varepsilon^2 c_g \tau, \quad (35)$$

$$\tau_{,y} = -c_0 u_{,xx} - \varepsilon^2 c_0 \sigma_{,x} + \varepsilon^2 u_{,tt}, \quad \sigma_{,y} = -\tau_{,x} + w_{,tt}.$$

С граничными условиями:

$$\tau^{\pm} = \pm \varepsilon^2 (\kappa_1^{\pm} u_{,xx} \pm S^{\pm} - \varepsilon^2 \kappa_3^{\pm} u_{,tt}), \quad \sigma^{\pm} = \pm (\kappa_2^{\pm} w_{,xx} \pm q^{\pm}) \mp \varepsilon^2 \kappa_3^{\pm} w_{,tt}. \quad (36)$$

Решение краевой задачи (35), (36) снова находим в виде асимптотических рядов (9). Интегрирование данной задачи в главном и первом приближениях приводит к соотношениям для перемещений и напряжений с точностью до величин порядка  $O(\varepsilon^4)$ .

В частности, в диссертации найдено асимптотически корректное распределение нормальных напряжений  $\sigma_{22}$  по толщине балки в виде полиномов пятой степени аргумента  $u$ . Заметим, что в литературе зависимость напряжения  $\sigma_{22}$  от поперечной координаты  $u$  либо игнорируется, либо вводится в качестве дополнительной гипотезы в виде

линейной или кубической функции, что приводит к некорректным соотношениям эффективной жесткости на изгиб в случае наличия остаточных поверхностных напряжений.

Одним из основных результатов главы является уравнение:

$$I_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - \kappa_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + J_1 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + O(\varepsilon^4) = F(x, t), \quad n = 1, 2, \quad (37)$$

описывающее колебания наноразмерной полосы-балки, где:

$$I_1 = \frac{c_0}{12} + \varepsilon^2 \left( \frac{\kappa_1}{4} + \frac{\kappa_2}{5} \right), \quad J_1 = 1 + \varepsilon^2 \left[ \kappa_3 - \left( \frac{1}{5} + \frac{c_6}{12} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right],$$

$$F(x, t) = F_0 - \varepsilon^2 \left\{ \left( \frac{1}{5} + \frac{c_6}{8} \right) \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (S^+ + S^-) - \frac{c_0 - c_v}{2} \frac{d^2 a_1}{dt^2} \right\}.$$

Здесь  $I_1$  – эффективная безразмерная жесткость на изгиб, зависящая от поверхностных модулей упругости и от остаточных поверхностных напряжений, а  $J_1$  – модифицированный оператор инерции, зависящий от поверхностной плотности.

*Значения поверхностных констант для некоторых материалов.* На основании данных атомистического моделирования для компонент поверхностного тензора упругости (R.E. Miller, V.B. Shenoy. Nanotechnology. 2000. Vol. 11.) в диссертации найдены значения поверхностного модуля упругости  $E_0$  для некоторых материалов с различной кристаллографией поверхности. В таблице 2 приведены значения  $E_0$ , а также поверхностная плотность  $\rho_0$  остаточное поверхностное напряжение  $s_0$ , а также механические свойства в объеме для алюминия Al[111], Al[001], никеля Ni[111], Ni[001] и кремния Si[100].

**Таблица 2 – Поверхностные модуль упругости, плотность, остаточное напряжение и механические характеристики в объеме для некоторых материалов**

Материал	$E_0$ , Н/м	$\rho_0$ , кг/м <sup>2</sup>	$s_0$ , Н/м	$E$ , ГПа	$\nu$	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>
Алюминий, Al[111]	-7,485	$5,46 \times 10^{-7}$	1,235	68,50	0,35	2700
Алюминий, Al[001]	-1,9923	$5,46 \times 10^{-7}$	1,3168	68,50	0,35	2700
Никель, Ni[111]	-2,360	–	-0,115	200	0,31	8902
Никель, Ni[001]	-43,856	–	0,708	200	0,31	8902
Кремний, Si[100]	-11,500	$3,17 \times 10^{-7}$	-0,505	130,00	0,24	2300

*Собственные колебания.* В диссертации исследованы свободные колебания нанобалки длиной  $l$ , изготовленной из приведенных в таблице 2 материалов. Собственная частота шарнирно опертой балки с  $m$  числом полуволн находится по формуле:

$$\omega_m^* = \frac{\pi m}{l} \sqrt{\frac{D^* \pi^2 m^2 + T_s^* l^2}{J^* \pi^2 m^2 + M^* l^2}}, \quad (38)$$

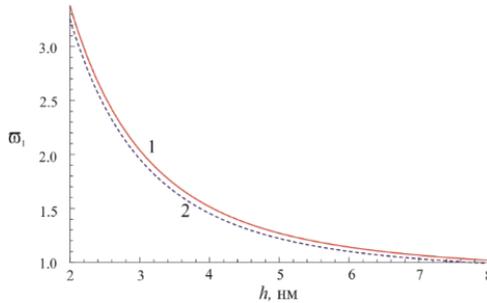
где:

$$D^* = D_c + D_s + D_r, \quad M^* = M_c + M_s, \quad J^* = J_0 + J_s, \quad D_c = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

$$D_s = \frac{h^2 E_0}{2}, \quad D_r = \frac{2h^2 s_0}{5}, \quad T_s^* = 2s_0, \quad M_c = \rho h, \quad M_s = 2\rho_0, \quad J_0 = \frac{\rho h^3 (17-7\nu)}{60(1-\nu)},$$

$$J_s = \frac{9h^2 \rho_0}{10}.$$

На рисунке 3 показана зависимость параметра  $\varpi_m = \omega_m^* / \Omega_m^*$ , где  $\Omega_m^*$  – собственная частота без учета поверхностных эффектов, для первой моды нанобалки длиной  $l = 50$  нм, изготовленной из алюминия, имеющего различные кристаллографические направления свободной поверхности, в зависимости от толщины  $h$ . Из рисунка видно, что для ультратонкой балки влияние поверхностных эффектов является значительным и в большей степени проявляется, если поверхности характеризуются кристаллографическим направлением Al[001].



1 – алюминий Al[001]; 2 – алюминий Al[111]

**Рисунок 3 – Относительная первая частота нанобалки, изготовленной из алюминия с различным кристаллографическим направлением поверхности, как функция толщины  $h$**

В диссертации также исследовано влияние поверхностных эффектов на первые пять собственных частот микроразмерной стеклянной полосы-балки с нанесенными на обе поверхности нанопленками железа Fe 103Å. В частности, установлено что увеличение остаточного положительного (растягивающего) поверхностного напряжения приводит к эффекту роста параметра  $\varpi_m$ , который является более выраженным для первой моды и уменьшается с ростом номера моды.

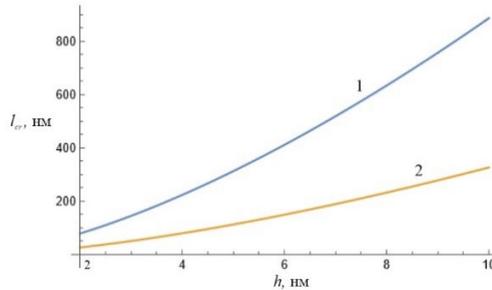
*Самостоятельная потеря устойчивости.* Построенная в диссертации модель нанобалки с поверхностными эффектами позволила установить эффект самостоятельной потери устойчивости (эффект самовыпучивания) под действием остаточных отрицательных поверхностных напряжений  $s_0$  при достижении длины балки критического значения:

$$l = l_{cr} = \pi h \sqrt{-\left[ \frac{Eh}{24(1-\nu^2 s_0)} + \frac{E_0}{4s_0} + \frac{1}{5} \right]}. \quad (39)$$

Данный эффект имеет место, если толщина нанобалки удовлетворяет неравенству:

$$h > -\frac{24(1-\nu^2)}{E} \left( \frac{E_0}{4} + \frac{s_0}{5} \right) \text{ при } \frac{E_0}{4} + \frac{s_0}{5} < 0. \quad (40)$$

На рисунке 4 показана зависимость критической длины от ее толщины для нанобалок, изготовленных из никеля и кремния. Видно, что для никелевой Ni[111] – нанобалки явление самовыпучивания наступает при больших значениях длины, нежели для кремниевой Si[100] – нанобалки. Таким образом кремниевые нанобалки, которые в качестве сенсорных элементов наиболее часто используются во всевозможных МЭМС и НЭМС, являются более чувствительными к поверхностным напряжениям и их геометрические размеры должны определяться с учетом наличия этих напряжений, сильно зависящих от кристаллографического направления на поверхности. Важно отметить, что для некоторых материалов кристаллографическое направление поверхности оказывает решающее влияние на возможность или невозможность эффекта самовыпучивания. Так, например, для Ni[001] – нанобалки эффект самовыпучивания невозможен для любой толщины, т. к. здесь остаточное поверхностное напряжение  $s_0 = 0,708$  Н/м является положительным (растягивающим).



1 – никель Ni[111]; 2 – кремний Si[100]

Рисунок 4 – Критическая длина наноразмерной полосы-балки, изготовленной из никеля и кремния, как функция ширины  $h$

В качестве основного результата главы является дифференциальное уравнение, предсказывающее длинноволновую деформацию наноразмерной полосы, являющееся аналогом уравнения для балки Тимошенко, но отличающееся учетом поверхностных эффектов в рамках теории Гуртина-Мёрдока. В явном виде получены

формулы для собственных частот наноразмерной полосы-балки, а также критических размеров, приводящих к самопроизвольной потере устойчивости (самовыпучиванию). На примере «нанобалок», изготовленных из никеля Ni[111] и кремния Si[100] показано, что отрицательное остаточное напряжение может приводить к эффекту самовыпучивания, при этом критическая длина нанополосы-балки возрастает вместе с ее толщиной. Для сравнения рассмотрены «нанобалки», изготовленные из алюминия Al[111], Al[[001], имеющего различное кристаллографическое направление на свободной поверхности. Установлено, что эффект поверхностных напряжений на первую частоту собственных частот для Al[001] выше, чем для Al[111], который быстро уменьшается с ростом толщины «нанобалки».

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

### Основные научные результаты диссертации

1. Разработаны новые свободные от кинематических гипотез математико-механические модели двух- и трехслойных балок и пластин с высококонтрастными упругими свойствами, включающие асимптотически корректные соотношения для полей перемещений и напряжений, которые в отличие от известных моделей удовлетворяют граничным условиям на лицевых и интерфейсных поверхностях без введения корректирующих коэффициентов на сдвиг. Найденные в явном виде формулы для перемещений и напряжений дают возможность с высокой асимптотической точностью (с точностью до величин порядка  $\varepsilon^4$ , где  $\varepsilon$  – аспектное число тонкостенной балки/пластины) рассчитывать НДС как при статических, так и при динамических нагрузках [4; 5; 6].

2. Выведены новые разрешающие уравнения типа Тимошенко–Рейснера для эквивалентных однослойных тонкостенных балок и пластин, учитывающих контрастность упругих свойств слоев и наличие сдвигов в жестком слое, которые позволяют корректно предсказывать динамические характеристики (собственные частоты и декременты колебаний) в случае высокой контрастности вязкоупругих свойств слоев [1; 5; 6; 7; 8; 10; 11; 13].

3. Построена новая свободная от гипотез математико-механическая модель ультратонкой полосы-балки, включающая асимптотически корректные соотношения для перемещений и напряжений, удовлетворяющие уравнениям баланса сил на лицевых поверхностях в рамках модели поверхностной упругости Гуртина–Мёрдока, а также разрешающее уравнение, позволяющее описывать длинноволновые свободные и вынужденные колебания, а также явление самопроизвольной потери устойчивости с учетом инерции и напряжений (включая остаточные) на лицевых поверхностях [2; 3; 9].

4. Установлены новые зависимости собственных частот шарнирно-опертой микроразмерной балки, изготовленной из стекла с нанесенными нанопленками железа от остаточных поверхностных напряжений и геометрических размеров, из которых, в частности, установлено, что учет остаточного положительного поверхностного напряжения в нанопленке железа, нанесенной на поверхность микроразмерной стеклянной балки приводит к значительному росту основной частоты (до 35 % при толщине 100 нм нанопленки на стеклянной подложке толщиной в 1 мкм и длиной 20 мкм) [2; 3; 12].

5. Найдены новые зависимости собственных частот шарнирно-опертых наноразмерных балок, изготовленных из алюминия, никеля и кремния с различным кристаллографическим направлением на поверхностях, от остаточных поверхностных напряжений, высоты и длины балки, из которых, в частности, установлено, что учет поверхностной плотности и положительных остаточных напряжений на поверхностях нанобалок толщиной в 6,5 нм из алюминия Al[111] и Al[001] приводит к увеличению фундаментальной частоты на 10 и 20 %, соответственно [2; 3; 12].

6. Найдены новые зависимости критической длины от высоты ультратонкой нанобалки из никеля Ni[111] и кремния Si[100], используемых в качестве ответственных сенсорных элементов наноразмерных электромеханических систем, при которых имеет место явление самопроизвольной потери устойчивости (самовыпучивание) под действием остаточных поверхностных сжимающих напряжений без каких-либо внешних механических воздействий [12, 3].

#### **Рекомендации по практическому использованию результатов диссертации**

Результаты, представленные в диссертации, которые относятся к моделированию слоистых балок и пластин с контрастными упругими свойствами и, в частности, полученные в явном виде формулы для полей напряжений и частот колебаний, могут быть использованы в проектных организациях для расчета НДС и динамических характеристик слоистых конструкций, таких как фотоэлектрические панели, автомобильные стекла, беспилотные летательные аппараты (БПЛА) и других тонкостенных элементов инженерных конструкций, собранных из высококонтрастных материалов. В том числе, материалы исследований включены в методику расчета напряженно-деформированного состояния двухслойной пластины под действием внешней нагрузки и использованы для расчета и проектирования корпуса, крыла и деталей малоразмерного БПЛА типа Бусел-М на УП «Научно-производственный центр многофункциональных беспилотных комплексов» Национальной академии наук.

Результаты относятся к исследованию многослойных пластин, оболочек и балок с высококонтрастными механическими свойствами, используются в учебном процессе кафедры био- и наномеханики механико-математического факультета Белорусского государственного университета.

Результаты, относящиеся к моделированию длинноволновой деформации и колебаниям ультратонких балок с нанопокрытием, а также нанобалок с остаточными поверхностными напряжениями, которые учитывают поверхностные эффекты, могут быть использованы в проектных организациях при проектировании сверхчувствительных тонкостенных элементов всевозможных микро- и наноэлектромеханических систем, таких как сенсоры, резонаторы, наноинденторы и в других областях, использующих достижения нанотехнологий.



## СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

### **Статьи в научных изданиях в соответствии с п. 19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь**

1. Ботогова, М. Г. Сравнительный анализ свободных колебаний двухслойных пластин с высококонтрастными механическими свойствами на основе моделей эквивалентных однослойных пластин / М. Г. Ботогова, Н. Д. Ле, Г. И. Михасев // Теоретическая и прикладная механика : международный научно-технический сборник / Белорусский национальный технический университет ; редкол.: Ю. В. Василевич (пред. редкол., гл. ред.). – Минск, 2023. – Вып. 38. – С. 106–111.

2. Михасев, Г. И. О влиянии поверхностных напряжений и инерции на собственные низкочастотные колебания упругой ультратонкой полосы-балки / Г. И. Михасев, Н. Д. Ле // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2024. – Т. 24, вып. 1. – С. 86–96.

3. Михасев, Г. И. Асимптотическая модель длинноволновых колебаний ультратонкой полосы-балки с учетом поверхностных эффектов / Г. И. Михасев, Н. Д. Ле // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия: Математика, Механика, Астрономия. – 2024. – Т. 11, № 3. – С. 557–569.

4. Ботогова, М. Г. Асимптотический анализ напряженно-деформированного состояния двухслойной пластины с высококонтрастными свойствами / М. Г. Ботогова, Н. Д. Ле, Г. И. Михасев // Теоретическая и прикладная механика : международный научно-технический сборник / Белорусский национальный технический университет ; редкол.: Ю. В. Василевич (гл. ред.) [и др.]. – Минск, 2024. – Вып. 39. – С. 3–10.

### **Статьи в других научных изданиях**

5. Mikhasev, G. Asymptotically correct analytical model for flexural response of a two-layer strip with contrast elastic constants / G. Mikhasev, N. Le // Sixty Shades of Generalized Continua Advanced Structured Materials / In: Altenbach H., Berezovski A., dell'Isola F., Porubov A. (eds). – Switzerland, 2023. – Vol. 170. – P. 517–540.

6. Mikhasev, G. Flexural Deformations and Vibrations of a Three-Layer Beam-Strip with a Stiff Core and Soft Skins / G. Mikhasev, M. Botogova, N. Le // Progress in Continuum Mechanics. Advanced Structured Materials / In: Altenbach, H., Irschik, H., Porubov, A.V. (eds). – Switzerland, 2023. – Vol. 196. – P. 265–282.

### **Статьи в сборниках материалов научных конференций**

7. Nguyen, Le Уравнения движения трехслойной балки-полосы с высококонтрастными свойствами материала / Le Nguyen // 80-я научная конференция студентов и аспирантов Белорусского государственного университета : материалы конф., Минск, 10–20 марта 2023 г. : в 3 ч. / Белорус. гос. ун-т ; редкол.: А. В. Блохин (гл. ред.) [и др.]. – Минск, 2023. – Ч. 1. – С. 267–270.

8. Михасев Г. И. Асимптотическая модель свободных длинноволновых колебаний трехслойной пластины с высококонтрастными упругими свойствами / Г. И. Михасев, Н. Д. Ле // X Поляховские чтения : материалы международной научной конференции по механике, 23–27 сентября 2024 г., Санкт-Петербург, Россия. – СПб., 2024. – С. 546–550.

9. Нгуен, Ле День Дифференциальные уравнения типа тимошенко длинноволновых деформаций ультратонкой полосы с учетом поверхностных эффектов / Ле

День Нгуен // 81-я научная конференция студентов и аспирантов Белорусского государственного университета : материалы конф., Минск, 15–25 мая 2024 г. : в 3 ч. / Белорус. гос. ун-т ; редкол.: А. В. Блохин (гл. ред.) [и др.]. – Минск, 2024. – Ч. 1. – С. 236–240.

10. Botogova, M. G. Comparative analysis of equivalent single-layer plate models using the example of free vibrations of two-layer plates with high-contrast properties / M. G. Botogova, Dinh Nguyen Le // International Conference Scientific research of the SCO countries: synergy and integration, Beijing China, 6 November, 2024. – М., 2024. – P. 124–130.

11. Ле, Динь Нгуен Напряженно-деформированное состояние в реакции длинноволнового изгиба двухслойной пластины с контрастными упругими характеристиками / Динь Нгуен Ле // Высшая школа: научные исследования. Материалы Межвузовского международного конгресса, Москва, 14 ноября 2024 г. – М., 2024. – С. 204–208.

12. Le, Dinh Nguyen On the influence of surface stress on the natural frequencies and critical dimensions of an elastic ultra-thin strip-beam / Dinh Nguyen Le, G. I. Mikhasev, M. G. Botogova // International Science Conference: Science Education Practice, Delhi India, 29 January, 2025. – Delhi, 2025. – P. 153–160.

#### **Тезисы докладов**

13. Nguyen, Le Уравнения движения двухслойной балки-полосы с высококонтрастными свойствами материала / Le Nguyen, Михасев Г. И. // Трансформация механико-математического и IT-образования в условиях цифровизации : материалы международного науч.-практ. конф., посвящ. 65-летию мех.-мат. фак., Респ. Беларусь, Минск, 26–27 апр. 2023 г. : в 2 ч. / Белорус. гос. ун-т ; редкол.: Н. В. Бровка (гл. ред.) [и др.]. – Минск, 2023. – Ч. 2. – С. 249–254.

## РЭЗЮМЭ

Ле Дзінь Нгуен

**Доўгахвалевое дэфармаванне і ваганні двух- і трохслаёвых бэлек і пласцін з улікам кантраснасці пругкіх уласцівасцяў пластоў і павярхоўных эфектаў**

**Ключавыя словы:** двух- і трохслаёвыя бэльні і пласціны, нанапамерныя паласы-бэльні, павярхоўныя эфекты, тэорыя Гурціна-Мёрдака

**Мэта працы:** усталяванне заканамернасцяў механічных паводзін двух- і трохслаёвых бэлек і пласцін з высокакантраснымі пругкімі ўласцівасцямі, а таксама нанапамерных бэлек з улікам павярхоўнай энергіі ў рамках павярхоўнай тэорыі пругкасці Гурціна-Мёрдака ад пругкіх уласцівасцяў складнікаў пластоў, наяўнасці павярхоўных высілкаў, уключаючы рэшткавыя і павярхоўнай інэрцыі.

**Метады даследавання:** метады асімптатычнага інтэгравання раўнанняў тэорыі пругкасці па таўшчыні тонкіх двух- і трохслаёвых бэлек/пласцін з высокакантраснымі ўласцівасцямі.

### **Атрыманыя вынікі:**

1. Распрацаваны новыя, свабодныя ад кінематычных гіпотэз матэматыка-механічныя мадэлі двух-і трохслаёвых бэлек і пласцін з кантраснымі пругкімі ўласцівасцямі. Выведзены новыя дазваляльныя раўнанні тыпу Цімашэнка-Рэйсснера для эквівалентных аднаслаёвых танкасценных бэлек і пласцін, якія ўлічваюць кантраснасць пругкіх уласцівасцяў пластоў і наяўнасць зрухаў у цвёрдым пласце.

2. Пабудавана новая свабодная ад гіпотэз матэматыка-механічная мадэль ультратонкай паласы-бэльні, якая ўключае асімптатычна карэктныя суадносіны для перасоўванняў і высілкаў, якія задавальняюць раўнанням балансу сіл на асобовых паверхнях у рамках павярхоўнай тэорыі пругкасці Гурціна-Мёрдака.

3. Устаноўлены залежнасці ўласных частот нанапамерных бэлек ад рэшткавых павярхоўных высілкаў і вышыні нанапамернай паласы-бэльні.

4. Устаноўлены залежнасці крытычнай даўжыні і шырыні нанапамернай паласы-бэльні з рэшткавымі адмоўнымі (сціскаючымі) напружаннямі, якія прыводзяць да яе самаадвольнай страты ўстойлівасці.

**Навуковая навізна** дысертацыйнай працы складаецца ў распрацоўцы новых, вольных ад кінематычных гіпотэз, матэматыка-механічных мадэляў, якія асімптатычна карэктна прадказваюць даўгахвалевое дэфармаванне і ваганні двух- і трохслаёвых бэлек і пласцін з высокакантраснымі ўласцівасцямі і нізкачашчынныя ваганні і самаадвольную страту ўстойлівасці ультратонкіх бэлек з рэшткавымі павярхоўнымі высілкамі ў рамках павярхоўнай тэорыі пругкасці.

**Рэкамендацыі па выкарыстанні і вобласць ужывання:** вынікі дысертацыі могуць быць скарыстаны ў практных арганізацыях для разліку напружана-дэфармаванне стан і дынамічных характарыстык слаістых канструкцый і ў практных арганізацыях пры праектаванні звышадчувальных танкасценных элементаў разнастайных мікра- і нанаэлектрамеханічных сістэм.

## РЕЗЮМЕ

Ле Динь Нгуен

### **Длинноволновое деформирование и колебания двух- и трехслойных балок и пластин с учетом контрастности упругих свойств слоев и поверхностных эффектов**

**Ключевые слова:** двух- и трехслойные балки и пластины, наноразмерные полосы-балки, поверхностные эффекты, теория Гуртина-Мёрдока

**Цель работы:** установление закономерностей механического поведения двух- и трехслойных балок и пластин с высококонтрастными упругими свойствами, а также наноразмерных балок с учетом поверхностной энергии в рамках поверхностной теории упругости Гуртина-Мёрдока от упругих свойств составляющих слоев, наличия поверхностных напряжений, включая остаточные и поверхностной инерции.

**Методы исследования:** метод асимптотического интегрирования уравнений теории упругости по толщине тонких двух- и трехслойных балок/пластин с высококонтрастными свойствами.

#### **Полученные результаты:**

1. Разработаны новые, свободные от кинематических гипотез математико-механические модели двух- и трехслойных балок и пластин с контрастными упругими свойствами. Выведены новые разрешающие уравнения типа Тимошенко-Рейсснера для эквивалентных однослойных тонкостенных балок и пластин, учитывающих контрастность упругих свойств слоев и наличие сдвигов в жестком слое.

2. Построена новая свободная от гипотез математико-механическая модель ультратонкой полосы-балки, включающая асимптотически корректные соотношения для перемещений и напряжений, удовлетворяющих уравнениям баланса сил на лицевых поверхностях в рамках поверхностной теории упругости Гуртина-Мёрдока.

3. Установленные зависимости собственных частот наноразмерных балок от остаточных поверхностных напряжений и ширины наноразмерной полосы-балки.

4. Установленные зависимости критической длины и ширины наноразмерной полосы-балки с остаточными отрицательными (сжимающими) напряжениями, приводящими к ее самопроизвольной потере устойчивости.

**Научная новизна** диссертационной работы заключается в разработке новых, свободных от кинематических гипотез, математико-механических моделей, которые асимптотически корректно предсказывают длинноволновое деформирование и колебания двух- и трехслойных балок и пластин с высококонтрастными свойствами, а также низкочастотные колебания и самопроизвольную потерю устойчивости ультратонких балок с остаточными поверхностными напряжениями в рамках поверхностной теории упругости.

**Рекомендации по использованию и область применения:** результаты диссертации могут быть использованы в проектных организациях для расчета НДС и динамических характеристик слоистых конструкций и в проектных организациях при проектировании сверхчувствительных тонкостенных элементов всевозможных микро- и наноэлектромеханических систем.

## SUMMARY

Le Dinh Nguyen

### **Long-wave deformation and vibrations of two- and three-layer beams and plates taking into account the contrast of elastic properties of layers and surface effects**

**Key words:** two- and three-layer beams and plates, nanoscale strip beams, surface effects, Gurtin-Murdoch theory

**Purpose of work:** establishing the patterns of mechanical behavior of two- and three-layer beams and plates with high-contrast elastic properties, as well as nanoscale beams, taking into account the surface energy within the framework of the Gurtin-Murdoch surface theory of elasticity from the elastic properties of the constituent layers, the presence of surface stresses, including residual stresses, and surface inertia.

**Research methods:** method of asymptotic integration of the equations of elasticity theory over the thickness of thin two- and three-layer beams/plates with high-contrast properties.

#### **Obtained results:**

1. Novel mathematical-mechanical models of two- and three-layer beams and plates with contrasting elastic properties, free from kinematic hypotheses, have been developed. New resolving equations of the Timoshenko-Reissner type have been derived for equivalent single-layer thin-walled beams and plates, taking into account the contrasting elastic properties of the layers and the presence of shears in the rigid layer.

2. A novel hypothesis-free mathematical-mechanical model of an ultra-thin strip-beam is constructed, including asymptotically correct relations for displacements and stresses satisfying the force balance equations on the face surfaces within the framework of the Gurtin-Murdoch surface elasticity theory.

3. Established dependences of natural frequencies of nanoscale beams on residual surface stresses and the height of the nanoscale strip-beam.

4. The established dependencies of the critical length and width of a nanoscale beam strip with residual negative (compressive) stresses leading to its spontaneous loss of stability.

**Scientific novelty:** the dissertation work consists in developing new, free of kinematic hypotheses, mathematical-mechanical models that asymptotically correctly predict long-wave deformation and vibrations of two- and three-layer beams and plates with high-contrast properties, as well as low-frequency vibrations and spontaneous loss of stability of ultra-thin beams with residual surface stresses within the framework of the surface theory of elasticity.

**Recommendations for using the results and scope of applications:** the results of the dissertation can be used in design organizations for calculating the stress-strain state and dynamic characteristics of layered structures and in design organizations for the design of ultra-sensitive thin-walled elements of all kinds of micro- and nanoelectromechanical systems.

Научное издание

**ЛЕ**  
**Динь Нгуен**

**ДЛИННОВОЛНОВОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ И КОЛЕБАНИЯ  
ДВУХ- И ТРЕХСЛОЙНЫХ БАЛОК И ПЛАСТИН  
С УЧЕТОМ КОНТРАСТНОСТИ УПРУГИХ СВОЙСТВ СЛОЕВ  
И ПОВЕРХНОСТНЫХ ЭФФЕКТОВ**

Автореферат диссертации  
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук  
по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

*В авторской редакции*

Подписано в печать 10.04.2025. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Цифровая печать.

Усл. печ. л. 1,45. Уч.-изд. л. 1,31. Тираж 60. Заказ 198.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя  
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65, 220013, г. Минск.